269. Определить движение тяжелой материальной точки, брошенной с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом α к горизонту, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости ($\mathbf{F} = mk\mathbf{v}$).

270. Частица массы m с зарядом e вылетает из начала координат со скоростью $(u, 0, 0)$. На нее действует постоянное магнитное поле $\mathbf{H}$, параллельное оси Oz, и сопротивление среды $km\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Показать, что ее координаты в момент времени t равны

$$x = \frac{kue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}\left(e^{kt} - \cos\lambda t + \frac{\lambda}{k}\sin\lambda t\right),$$

$$y = -\frac{\lambda u}{k^2+\lambda^2} + \frac{ue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}(\lambda\cos\lambda t + k\sin\lambda t),$$

где $\lambda = \dfrac{eH}{mc}$, c — скорость света.

271. Частица движется в сопротивляющейся среде, действующей на нее с силой $\mathbf{F} = 2\lambda\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, и притягивается к точке $(0, 0)$ с силой $\mu^2 r$ $(m = 1)$. В точке $(a, 0)$ частица обладает скоростью v_0, параллельной оси Oy. Показать, что при $\mu > \lambda$ траектория частицы определяется уравнениями

$$x = ae^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$y = \frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$, r — расстояние до движущейся точки от точки $(0, 0)$.

272. Материальная точка A с массой m, находившаяся на расстоянии a от оси Ox, получила начальную скорость $\mathbf{v}_0$, параллельную оси Ox. Точка A притягивается осью Ox с силой $\mathbf{F}$, прямо пропорциональной расстоянию от нее; коэффициент пропорциональности равен mk^2. Найти уравнения движения и траекторию точки.

§ 5. Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Например, решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

как известно, сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx + y_0.$$

Если искомая функция y входит в уравнение линейно, то интегральное уравнение называется *линейным*.

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)\,dt \tag{1}$$

(a и b — постоянные) называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Здесь $K(x, t)$, $f(x)$ — заданные функции, $y(x)$ — искомая функция. Функцию $K(x, t)$ называют *ядром уравнения* (1).

Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)\,dt \tag{2}$$

называют *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода*.

Если в уравнениях (1) и (2) $f(x) \equiv 0$, то уравнения называются *однородными*.

Если искомая функция $y(x)$ входит только под знак интеграла, то имеем соответственно *уравнения Фредгольма* или *Вольтерра первого рода*

$$\int_a^b K(x, t)y(t)\,dt = f(x) \quad \text{или} \quad \int_a^x K(x, t)y(t)\,dt = f(x).$$

Уравнения вида

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x - t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{3}$$

с ядром $K(x - t)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра. Они иногда называются уравнениями *типа свертки*.

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x - t)\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ и $K(x)$ достаточно гладкие функции и имеют конечный порядок роста при $x \geqslant 0$. В этом случае и $\varphi(x)$ при $x \geqslant 0$ имеет конечный порядок роста, а значит, может быть найдено изображение функций f, K и φ (по Лапласу). Пусть $\Phi(p) \risingdotseq \varphi(x)$, $F(p) \risingdotseq f(x)$, $L(p) \risingdotseq K(x)$. Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки (см. § 14, IX), будем иметь

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\Phi(p), \tag{5}$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, \quad L(p) \neq 1. \tag{6}$$

Для $\Phi(p)$ находим оригинал $\varphi(x)$ — решение интегрального уравнения (4).

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt. \tag{7}$$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получим на основании правила изображения свертки

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2}\Phi(p), \tag{8}$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)}. \tag{9}$$

Находя оригинал для $\Phi(p)$, получим решение интегрального уравнения (7)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x). \quad \triangleright \tag{10}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

273. $\varphi(x) = \sin x + \int_0^x (x - t)\varphi(t)\,dt.$ **274.** $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2\varphi(t)\,dt.$

275. $\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x - t)\varphi(t)\,dt.$ **276.** $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

277. $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)\,dt.$

278. $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x (x - t)e^{-(t-x)}\varphi(t)\,dt.$

279. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2\varphi(t)\,dt.$

280. $\varphi(x) = x + 2\int_0^x [(x - t) - \sin(x - t)]\varphi(t)\,dt.$

281. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)\,dt.$

282. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x - t) - 4(x - t)^2]\varphi(t)\,dt.$

283. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x - t)\varphi(t)\,dt.$ **284.** $\varphi(x) = e^x - 2\int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)\,dt.$

285. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6}\int_0^x (x - t)^3\varphi(t)\,dt.$ **286.** $\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x - t)\varphi(t)\,dt.$

287. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x - t)\varphi(t)\,dt.$

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтерра первого рода с ядром $K(x, t)$, зависящим только от разности $x - t$, т. е. уравнения вида

$$\int_0^x K(x - t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{11}$$

где $f(x)$ — известная функция, $\varphi(x)$ — искомая функция. При этом мы предполагаем $K(x, x) \neq 0$.

Пусть $F(p) \risingdotseq f(x)$, $L(p) \risingdotseq K(x)$, $\Phi(p) \risingdotseq \varphi(x)$. Применяя к обеим частям (11) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, будем иметь

$$L(p) \cdot \Phi(p) = F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

Оригинал для $\Phi(p)$ будет решением $\varphi(x)$ интегрального уравнения (11).

Задачи для самостоятельного решения

Решить интегральные уравнения:

288. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x.$ **289.** $\int_0^x J_0(x - t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

270. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{eH}{c}\dot{y} - km\dot{x}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = u, \\ m\ddot{y} = \dfrac{eH}{c}\dot{x} - km\dot{y}, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \\ m\ddot{z} = -kmz, & z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

271. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda\dot{x} - \mu^2 x, & x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ m\ddot{y} = -2\lambda\dot{y} - \mu^2 y, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \end{cases}$$

272. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \\ m\ddot{y} = -mk^2\dot{y}, & y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{cases}$$

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = a\cos kt.$$

Траектория точки $y = a\cos\left(\dfrac{kx}{v_0}\right)$.

273. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x + \dfrac{1}{2}\sin x.$

274. $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^x - e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}e^{-x/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

275. $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{6}x^3.$ **276.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{5}e^{2x} + \dfrac{3}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x.$

277. $\varphi(x) = 2 + x - e^{x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

278. $\varphi(x) = -\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{8}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}e^{2x} - \dfrac{1}{12}x^3.$

279. $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{6}e^x + \dfrac{1}{3}e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

280. $\varphi(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^x - e^{-x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right).$

281. $\varphi(x) = xe^x.$ **282.** $\varphi(x) = e^x.$ **283.** $\varphi(x) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\cos\sqrt{3}x.$

284. $\varphi(x) = \operatorname{ch} x - xe^{-x}.$ **285.** $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x).$

286. $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3.$ **287.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{5}}{2}x.$ **288.** $\varphi(x) = 1 - x.$

289. $\varphi(x) = J_0(x)$, так что $\displaystyle\int_0^x J_0(x-t)J_0(t)\,dt = \sin x.$

290. $\varphi(x) \equiv 1.$ **291.** $\varphi(x) = e^{-x}.$ **292.** $\varphi(x) = 1 + 2x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}$

293. $\varphi(x) = 2xe^x - x^2e^x.$ **294.** $\varphi(x) \equiv 1.$ **295.** $\varphi(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}.$

296. $\varphi_1(x) = e^{-x}(1-x)$, $\varphi_2(x) = \dfrac{8}{9}e^{2x} + \dfrac{1}{3}xe^{-x} - \dfrac{8}{9}e^{-x}.$

297. $\varphi_1(x) = e^{2x}$, $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{2x}.$

298. $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{3}e^{3/2x}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \dfrac{1}{3},$

$\varphi_2(x) = e^{3/2x}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

299. $\varphi_1(x) = (x+2)\sin x + (2x+1)\cos x$, $\varphi_2(x) = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\cos x - \left(\dfrac{1}{2} +\right.$

300. $\varphi_1(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}x - \dfrac{3}{2}\operatorname{sh} x, \quad \varphi_2(x) = \cos\sqrt{3}x - 3\operatorname{ch} x.$

301. $\varphi_1(x) = 2(1-x)e^{-x}, \quad \varphi_2(x) = (1-x)e^{-x}.$

302. $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!}\eta(t-k).$ **303.** $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(t-k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta($

304. $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k).$

305. $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!}\eta(t-2k).$

306. $x(t) = \left(-t + \dfrac{1}{2}t^2\right)\eta(t) + \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(t-k+2)^{k-1}}{k!}(t-3k+2)\eta(t-k+2)$

307. $x(t) = \left(1 + t + \dfrac{t^2}{2}\right)\eta(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta$

308. $x(t) = \cos t.$ **309.** $u(x,t) = u_0\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz\right).$

310. $u(x,t) = u_1\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2}\,dz.$

311. $u(x,t) = ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\cos\left(\omega t - x\sqrt{\dfrac{\omega}{2k}}\right) - \dfrac{a}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+\omega^2}.$

312. $u(x,t) = a\left[e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}}\sin\left(\omega t - x\sqrt{\dfrac{\omega}{2k}}\right) + \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin x\sqrt{\frac{\rho}{k}}\frac{d\rho}{\rho^2+\omega^2}\right.$