Содержание

1. Дополнения **1**
1.1. Немного истории . . . 1
1.2. Логика и математическая логика . . . 6
1.2.1. Импликация и логический вывод . . . 6
1.2.2. Закон Дунса Скотта . . . 8
1.3. Замечательные изречения . . . 9
1.3.1. Мудрые . . . 9
1.3.2. Разные . . . 10

Список Литературы **12**

1. Дополнения

1.1. Немного истории

Разум – сложный инстинкт, не успевший еще сформироваться.

А. и Б. Стругацкие

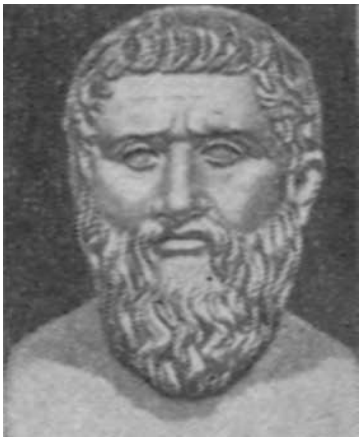
Гильберту принадлежит формальная точка зрения на математику как на дедуктивный вывод логических следствий из заданных аксиом. Эта точка зрения безусловно справедлива, но лишь в той мере, в какой поэзия сводится к последовательностям букв определенных алфавитов.

В.И. Арнольд

Исходные знания об окружающем мире, преобразовавшиеся в современную науку, восходят к древним грекам, а возможно и к египетским жрецам ([2] и [3]).

Многие школы философов, в частости, школы Пифагора и Платона (ученика Сократа), знали и развивали логику и технику доказательств. Самый известный ученик Платона – Аристотель – изложил теорию логики в своих «Аналитиках» ([1]). Там были приведены логические законы и три фигуры силлогизмов.

Пифагор (570—490 до н.э.) на фреске Рафаэля

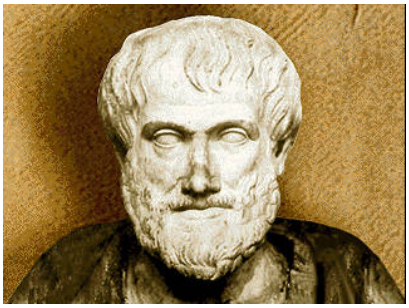


Платон (427-347 до н.э.)

Евклид (356-300 до н.э.)

Учеником учеников Платона был Евклид. «Начала» Евклида превзошли сочинения его предшественников и на протяжении более двух тысячелетий оставались основным трудом по элементарной математике. В 13 частях, или книгах, Начал содержится большая часть знаний по геометрии и арифметике эпохи Евклида. Его личный вклад сводился к такому расположению материала, при котором каждая теорема логически следовала бы из предыдущих. I книга

начинается с определений, недоказываемых постулатов и «общих понятий», а заканчивается теоремой Пифагора и обратной ей теоремой.



Аристотель (384 – 322 до н.э.)

Как и геометрия Евклида, логика Аристотеля и вообще все его представления о мире считались незыблемыми, сами собой разумеющимися и недопускающими никакой критики около двух тысяч лет. Эксперименты как орудие познания и проверки идей считались делом недостойным, достаточно было логической убедительности теории.

В частности в физике доминировали идеи Аристотеля, что «более тяжёлое падает быстрее», что «скорость тела пропорциональна приложенной силе», и что «природа не терпит пустоты» (из-за чего брошенный камень летит и после того, как рука, прилагавшая к нему силу, отпустила его: за сдвинувшимся камнем образуется пустота, в неё устремляется воздух, он и толкает камень дальше).

Реальный прорыв в представлениях о мире и способах его изучения произвёл итальянский ученый Галилео Галилей. Известен его опыт по сбрасыванию с вершины Пизанской башни ядер различной массы, приземление которых происходило одновременно. (Точнее, разница при приземлении деревянного и чугунного ядра составила два пальца, и ему постоянно напоминали об этой его «ошибке», забывая, что он опроверг гораздо более серьёзную ошибку Аристотеля...) Галилей ввёл также идею о движении по инерции. Однако за свои научные взгляды Галилей подвергался гонениям со стороны церкви. На суде инквизиции под страхом сожжения на костре ученый был вынужден от них отказаться.

Однако традицию применять эксперименты для проверки и уточнения теории восприняли Еванжелиста Торричелли и Блез Паскаль. Торричелли даже был назначен преемником Галилея по кафедре математики и физики в университете во Флоренции после его смерти.

Галилей (1564 – 1642)

Торричелли (1608 – 1647)

Паскаль (1623 – 1662)

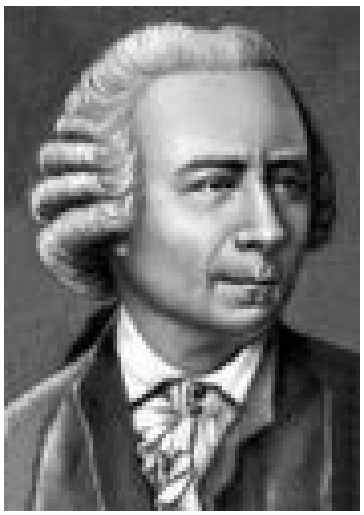
Леонард Эйлер – самый продуктивный математик в истории, автор более чем 800 работ. Его вклад в логику состоит в том, что он стал систематически применять метод кругов Эйлера. Его несравнимо бóльший вклад в математику выходит за рамки обсуждаемой тематики. Тем не менее, многие базовые идеи, результаты и методы современной математики принадлежат этому великому учёному.

Что же касается логики Аристотеля, то она оставалась основой научного мышления вплоть до XX века. В начале XX века, однако, в попытках построить аксиоматическую математику,

и в первую очередь аксиоматическую теорию множеств, по образцу Евклидовой геометрии математики столкнулись с массой неожиданных проблем.

Незадолго до этого, во второй половине XIX века Георг Кантор в попытке упорядочить математику, ввёл понятие «множества» и потребовал, чтобы все объекты в математике описывались как множества, удовлетворяющие некоторым аксиомам.

Его подход вдохновил многих математиков, в первую очередь, Давида Гильберта. Возникло движение по приведению всей математики и смежных наук в порядок по аналогии с евклидовой геометрией.



Эйлер (1707 – 1783)

Кантор (1845-1918)

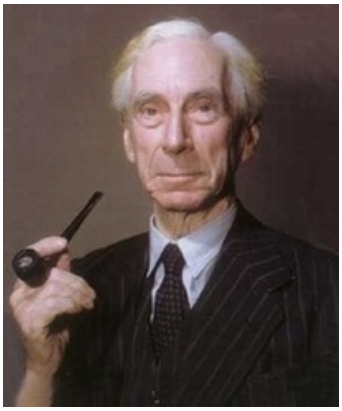
Гильберт (1862-1943)

Однако, в 1903г. Бертран Рассел открыл парадокс, показывающий что теория множеств в существовавшем виде приводит к противоречию. Этот парадокс привёл к тяжёлому кризису математики, её расколу на несколько принципиально разных направлений и дальнейшему резкому ускорению её развития, поскольку, как говорил Гильберт ([5]), «Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. ... Где же искать надёжность и истинность, если даже само математическое мышление даёт осечку?»

> ***Парадокс Рассела.*** *Назовём множество «хорошим», если оно содержит себя в качестве своего элемента, и «плохим», если не содержит. Обозначим через M множество всех плохих множеств. Является ли M собственным элементом?*
> *Если да, то оно хорошее. Но по определению, оно содержит только плохие множества. Следовательно, оно плохое.*
> *Если да, то оно плохое. Но по определению, оно содержит все плохие множества. Следовательно, оно содержит себя в качестве своего элемента и, следовательно, оно плохое.*
> *Противоречие.*

Есть и более простая формулировка этого парадокса, известная под названием «парадокса брадобрея»:

> ***Парадокс брадобрея.*** *Одному деревенскому брадобрею приказали «брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется». Как он должен поступить с собой?*



Рассел (1872-1970)

Противоречие в парадоксе Рассела возникает вследствие предположения о существовании такого объекта, как множество всех множеств, и о применимости к нему общих свойств обычных множеств.

Стремясь преодолеть этот парадокс, математики развили три направления: *логицизм*, *формализм* и *интуицианизм*.

Логицизм. Фреге первым обнаружил, что парадоксы типа Рассела связаны не столько с их математическим содержанием, сколько со свойствами языка. Рассел начал разрабатывать эту идею и построил свой вариант аксиоматической теории множеств. Результатом этой работы стало издание трёхтомника Рассел, Уайтхед «Principia Mathematica» (1910—1913 гг.).

Интуиционизм. Голландский математик Лейтцен Эгберт Ян Брауэр и его последователи подошли к решению проблемы, вызванной парадоксом Рассела, иначе.

Брауэр (1881-1966)

Классическая математика, по мнению Брауэра, противоречива, т.к. опирается на теорию множеств, содержащую парадоксы. Новая (интуиционистская) математика рассматривает мир мысленных процессов, развертывающихся в последовательность элементарных актов (шагов). Результаты этих процессов – математические объекты и конструкции. Брауэр и последователи решили в принципе изъять понятие актуальной бесконечности из науки. Они принимали метод математической индукции только как обоснование наличия доказываемого свойства у любого **конечного** числа элементов данного множества, но никак не у всех сразу. Они принимали только конструктивные доказательства существования какого-либо объекта, указывающие способ его построения.

Кроме того, согласно Брауэру, логические законы не являются абсолютными истинами, не зависящими от того, к чему они прилагаются. В частности, закон исключенного третьего, верный в случае конечной математики, неприменим в рассуждениях о бесконечных множествах.

Формализм. Этот подход разрабатывал Гильберт.

Гильберт заявил, что интуиционизм стремится «развалить и изуродовать математику». Своей целью Гильберт провозгласил возвращение математике её логической строгости. В двадцатые годы XX века Гильберт, его сотрудники и соратники В. Аккерман, П. Бернайс, фон Нейман и др. начали разрабатывать математический аппарат формализма. В 1934-м и 1939-м годах вышли два тома «Оснований математики» Гильберта и П. Бернайса, в которых развивалась аксиоматическая теория доказательств, и которые заложили основу современной математической логики.

В работе **Математическое мышление**[1] он пишет:

Положение, однако, изменяется, когда противоречия имеют место в чисто теоретических областях знания. Теория множеств предоставляет классический пример такого случая, например парадокс множества всех множеств, который восходит к самому Кантору. Этот парадокс столь серьезен, что такие выдающиеся математики, как Кронекер и Пуанкаре, пришли к отрицанию теории множеств в целом (отрицанию одного из наиболее

[1] См. [6], стр. 97 – 104. В других переводах – «Аксиоматическое мышление».

плодотворных и могущественных разделов математики) и любого оправдания ее существования.

Аксиоматический метод тем не менее находит средство для устранения таких опасных обстоятельств. Поскольку он выдвигает подходящие аксиомы, ограничивающие, с одной стороны, произвол в определениях множеств самих по себе и, с другой допустимость использования их элементов специфическим образом, Цермело удалось развить теорию множеств таким образом, что указанный парадокс был устранен и посредством ограничений смысл и приложимость теории множеств остались прежними.»

С другой стороны, Гильберт говорит:

«Так же и утверждения нового, так называемого «интуиционизма», — как бы скромны они ни были, — прежде всего должны, по моему мнению, получить от этого трибунала [математики, вооружённой теорией доказательств Гильберта и Бернайса – Д.Т.] *своё право на существование.*

... В противоположность стремлениям Фреге и Дедекинда, мы пришли к убеждению, что в качестве предварительного условия для возможности научного познания необходимы некоторые геометрически наглядные представления и рассмотрения и что одна только логика недостаточна. Оперирование с бесконечным может стать надёжным только через конечное.»[1]

Гильберт отстранился как от интуиционизма, так и от логицизма, усматривая и там, и там некоторую неполноценность.

Он полагал, что метод его теории доказательств достаточен как для построения математики, так и для проверки на непротиворечивость любой теории, а также проверки на истинность каждого отдельного утверждения любой теории.

Однако, эти надежды Гильберта оказались не вполне реалистичными. Курт Гёдель (1906-1978) доказал, что в любой достаточно богатой непротиворечивой теории во-первых, существуют высказывания, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть(первая теорема Гёделя о неполноте) и, во-вторых, не существует доказательства (средствами самой теории) её непротиворечивости (вторая теорема Гёделя о неполноте). Его работа «Uber formal unentscheidbare Satze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme» («О формально неразрешимых предложениях *Principia Mathematica* и родственных систем») была опубликована в 1931 году в одном из немецких научных журналов и признана одним из величайших достижений современной логики.[2]

Гёдель и Эйнштейн

Влияние формализма в первой половине XX-го века было чрезвычайно велико. Даже созданная в это время теория относительности – первая из всех физических теорий – была построена на аксиоматической основе. Участие в её создании Курта Гёделя, вероятно, этому немало поспособствовало.

Однако, Гёдель занимался и другими научными исследованиями. Он помог разработать приемлемую аксиоматику теории множеств, в которой не возникало бы парадоксов, подобных Расселовскому.

[1] См. [5]. Доклад, прочитанный 4-го июня 1925г. на съезде математиков, организованном вестфальским математическим обществом в Мюнстере в память Вейерштрасса.

[2] Подробнее см. [8].

И в настоящее время используются две системы аксиом теории множеств:
◇ система Цермело – Френкеля (ZF: Zermelo – Fraenkel) и
◇ система Неймана – Бернайса – Гёделя (NBG: von Neumann – Bernays – Gödel).

1.2. Логика и математическая логика

1.2.1. Импликация и логический вывод

Мы будем говорить, что **из** A **следует (логически следует)** B, если суждение «$A \Rightarrow B$» истинно, то есть может быть получено из заданной системы аксиом и определений при помощи правил логического вывода: силлогизмов и законов логики.

С другой стороны, мы будем считать, что A **и** B **связаны импликацией** ($A \mapsto B$), если справедлива **таблица истинности**:

A	B	$A \mapsto B$
ложно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
истинно	истинно	истинно

Здесь A и B – термины или суждения, истинность и ложность которых может меняться в зависимости от внешних воздействий (например, результата эксперимента или присвоения переменным тех или иных значений в процессе выполнения программы).

Важно обращать внимание, что

операции логического следования и импликации **неэквивалентны**,

ибо

1) Из того, что суждения A и B ложны, не следует существование достоверного логического вывода, который приведёт из A в B. Такой вывод может существовать, а может и не существовать:
например, из ложного суждения «все куры – рыбы» логически вытекает ложное «куры не вылупляются из яйца», но из того же ложного суждения «все куры – рыбы» никаким логическим выводом невозможно получить ложное «земля покоится на трёх китах».
Таким образом, если пытаться найти связь между «следованием» и «импликацией», то первая строчка таблицы может пониматься только в смысле «существуют ситуации, когда два ложных суждения связаны логическим следованием».

2) Из того, что суждение A ложно, а B истинно, не следует существование достоверного логического вывода, который приведёт из A в B. Такой вывод может существовать, а может и не существовать:
например, из ложной посылки «$2 \cdot 2 = 5$ **и** *$5 + 7 = 11$» логически вытекает истинное «$2 \cdot 2 + 7 = 11$», но из ложного суждения «$2 \cdot 2 = 5$» никаким логическим выводом невозможно получить истинное «Эйлер – великий математик».*[1]

[1] Здесь, как и всюду, мы предполагаем отсутствие софизмов, а также систем аксиом и определений типа «Будем называть Эйлером число 5» и т.п.

Таким образом, если пытаться найти связь между «следованием» и «импликацией», то вторая строчка таблицы может пониматься только в смысле «существуют ситуации, когда из ложного высказывания логически следует истинное».

3) Из того, что суждения A и B истинны, не следует существование достоверного логического вывода, который приведёт из A в B. Такой вывод может существовать, а может и не существовать:
например, из истинного суждения «все куры – птицы» логически вытекает истинное «куры вылупляются из яйца», но из того же истинного суждения «все куры – птицы» никаким логическим выводом невозможно получить истинное «Меркурий – ближайшая к Солнцу планета».
Таким образом, если пытаться найти связь между «следованием» и «импликацией», то четвёртая строчка таблицы может пониматься только в смысле «существуют ситуации, когда два истинных суждения связаны логическим следованием».

По сути, «следование» и «импликацию» можно считать согласными только в одном: «из истинной посылки невозможно достверным логическим выводом получить ложное утверждение».

Путать и отождествлять эти два понятия, значит допускать справедливость высказываний:

- «Из того, что Солнце вращается вокруг Земли, следует, что крокодилы летают.»
- «Из того, что $2 \cdot 2 = 5$, следует, что $2 \cdot 2 = 4$.»
- «Из того, что Капелла – α Возничего, следует, что параллельные прямые не пересекаются.»

Однако, это различие между «следованием» и «импликацией» зачастую ускользает от внимания даже у математиков. В статье «Математическая дуэль вокруг Бурбаки» академик В. И. Арнольд ([3]) приводит пример **инструкции для студентов первого курса Парижского университета Орсэ**, где говорится:

> *"Математика есть наука о доказательствах, доказательства это цепочки имплликаций: (из A вытекает B, из B вытекает C) - цепочка; вывод: доказано, что из A вытекает C. Итак, самое главное - понять, что такое одна импликация. Вот ее определение. Пусть A и B - два произвольных высказывания. Если оба они верны, то говорят, что из A вытекает B".*

«На мой непросвещенный взгляд,» – пишет Владимир Игоревич, – *«такая точка зрения на импликации (а следовательно, и на доказательства, и на математику) –* ***чистое мракобесие***[1]*. При таком определении из того, что дважды два четыре, следует, что Земля вращается вокруг Солнца. Студента, понимающего выводы и доказательства подобным образом, уже бесполезно учить какой-либо естественной науке: мракобесие уничтожает естествознание как таковое. По этой мракобесной логике Галилея поделом наказывали: он ведь говорил о своих доказательствах вращения Земли и других подобных фактов совсем в другом смысле. Авторы инструкции для младшекурсников, видимо, чувствовали, что они что-то не договорили, а потому добавили к своему определению импликации примечание.»*

> *"Пусть опять даны два утверждения A и B, но на этот раз утверждение A ложно. Тогда тоже говорят, что имеет место импликация «из A вытекает B», даже независимо от того, верно B или нет".*

«Впрочем, авторы обещают в дальнейшем этим примечанием не пользоваться,» – заканчивает пример Владимир Игоревич.

[1] Выделено мной. Д.Т.

Таким образом, замена понятия «логического следствия» на понятие «импликации» является явной логической ошибкой – **подменой термина**.

Справедливости ради надо отметить, что операция импликации задумывалась авторами математической логики как аналог логического следствия в формальном языке.

Однако, положение усугубляется ещё и тем, что кванторы, используемые уже повсеместно в математике, пришли из математической логики. Это зачастую создаёт иллюзию, что сформулированные с их помощью суждения являются высказываниями математической логики, с которыми и действовать надо по законам этой дисциплины. Однако, как показывают приведённые выше примеры, эквивалентности между импликацией и логическим следованием нет. Так что импликацию следует использовать только там и так, где и как это уместно, а именно – в математической логике и более нигде.

1.2.2. Закон Дунса Скотта

Весьма популярным последнее время является так называемый закон Дунса Скотта[1].

Закон Дунса Скотта: *Из противоречия следует всё, что угодно.*

$$\forall\, B \qquad (A \ \text{and} \ \neg A) \Rightarrow B.$$

Другая формулировка закона: «Из ложного высказывания следует любое высказывание».

Дунс Скотт (1265—1308)

Несмотря на то, что Дунс Скотт жил более 700 лет назад, его закон очень органично перекликается с таблицей истинности импликации, – изобретения последнего столетия (стр. 6). Действительно, если в высказывании «Из ложного высказывания следует любое высказывание» слово «следует» заменить на знак импликации, всё становится на свои места: закон Дунса Скотта всего лишь описывает две первые строчки этой таблицы:

- если A ложно и B ложно, то $A \mapsto B$ истинно,
- если A ложно, а B истинно, то $A \mapsto B$ истинно.

Однако, если употреблять его буквально, то можно получить в точности такие же нелепости, как и при неверном использовании импликации в качестве логического следования:

«если $3 = 7$, то Фобос – спутник Марса»

и

«если $3 = 7$, то Фобос – центр Вселенной»

и т.п.

[1] Иоанн Дунс Скотт (Duns Scotus, 1265—1308) — шотландец, с 16 лет вступил во францисканский монашеский орден, заметный представитель средневековой схоластики.

В книге [7] приводится следующая история:

> *Известен анекдот об английском философе и логике Б.Расселе, доказавшем своему собеседнику на каком-то вечере, что из того, что два плюс два равно пяти, вытекает, что он, Рассел — римский папа. В доказательстве использовался закон Дунса Скотта.*
>
> *Отнимем от обеих сторон равенства 2 + 2 = 5 по 3. Получим: 1 = 2. Если собеседник утверждает, что Рассел не является римским папой, то этот папа и Рассел — два разных лица. Но поскольку 1 = 2, папа и Рассел — это одно и то же лицо.*

Заметим, что доказательство Рассела, на первый взгляд, подтверждает справедливость закона Дунса Скотта: из ложного утверждения выведено произвольно взятое другое ложное утверждение. По этой схеме из посылки «1 = 2» легко доказать действительно всё, что угодно. Однако в этом доказательстве есть и тонкий софизм – почти незаметная подмена термина. Сделать эту ошибку явной и выпуклой можно, если попытаться обратить это доказательство и по тому же алгоритму доказать, что из ложного утверждения «Рассел — римский папа» следует ложное утверждение «1 = 2». Для того, чтобы из предположения о тождестве каких-то двух различных объектов сделать вывод о тождестве совсем других объектов – чисел 1 и 2, необходима явная подмена термина.

Утверждение закона Дунса Скотта, очевидно, имеет смысл только если интерпретировать его по тем же правилам, что и действие операции импликации:

- существуют ситуации, когда два ложных суждения связаны логическим следованием.
- существуют ситуации, когда из ложного высказывания логически следует истинное.

1.3. Замечательные изречения

1.3.1. Мудрые

Я знаю, что я ничего не знаю. Остальные не знают даже этого.

Сократ

Избери лучшее, а привычка сделает его приятным и легким.

Пифагор Самосский

Дурак думает, что он умен; умный же знает, что глуп он.

У. Шекспир

Из дома реальности легко забрести в лес математики, но лишь немногие способны вернуться обратно.

Х. Штейнхаус

Образование – то, что остаётся, когда все выученное забыто.

Макс фон Лауэ

Хорошее образование должно оставлять желать лучшего.

А. Грегг

Чтобы переваривать знания, надо поглощать их с аппетитом.

А. Франс

Достижения промышленности никогда не появились бы на свет, если бы в мире существовала одна лишь практика и если бы этим достижениям не способствовали незаинтересованные безумцы, никогда даже не помышлявшие о какой-либо практической пользе.

Д. Гильберт

Преподаватели сеют разумное, доброе, вечное. И отсеивают всё остальное.

из ВУЗовской жизни

1.3.2. Разные

Только один человек меня понял; да и тот меня, по правде сказать, не понял.

Г. В. Ф. Гегель

Если тебе трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять ее хотя бы наполовину.

С. Врублевский

Одни говорят, что Грета Гарбо жива, другие - что умерла. Я не верю ни одной из этих дурацких сплетен.

Я. Ипрохорская

Вы можете идти совершенно спокойно. И главное, Баскервиль! Если Вам хоть немножечко дорога Ваша жизнь, никуда не сворачивайте с тропинки.

Ш. Холмс

Если хотите быть счастливыми в браке – никогда не женитесь!

«Сильва»

Я люблю работу: она захватывает меня целиком. Я могу часами сидеть и смотреть, как другие работают.

Дж. К. Джером

Плюрализм нужен нашей стране как воздух, и двух мнений об этом быть не может.

М. С. Горбачёв

Или у него с головой что-то случилось?.. Вот что может произойти, если кто-то начнет размышлять.
Принципы, которые были принципиальны, были непринципиальны.
Правильно или неправильно – это вопрос философский.
Не только противодействовать, а будем отстаивать это, чтобы этого не допустить.
Вы думаете, что мне далеко просто. Мне далеко не просто!
Все это так прямолинейно и перпендикулярно, что мне неприятно.
Если я еврей – чего я буду стесняться! Я, правда, не еврей.
Естественные монополии – хребет российской экономики, и этот хребет мы будем беречь как зеницу ока.
Есть еще время сохранить лицо. Потом придется сохранять другие части тела.
Мы продолжаем то, что мы уже наделали.
Нам нет необходимости наступать на те же грабли, что уже были.
Сейчас историки пытаются преподнести, что в тысяча пятьсот каком-то году что-то там было.

Да не было ничего! Все это происки!

В. С. Черномырдин

Мы, конечно, все что можно со своей стороны делаем, но не все мы можем. То есть мы можем, но совесть не позволяет.

Б. Н. Ельцин

Пора принять меры и наложить вето на табу!
Я люблю играть в хоккей сам против себя.
Я президент государства, и это государство будет, пока я президент.

А. Г. Лукашенко

Если нет проблемы, то не надо ее в кучу сваливать.

В. Калюжный

Мертворожденное СНГ продолжает умирать.

Г. А. Зюганов

Допустимо ли, правильно ли оставаться в стороне от того процесса, который ведет нас в пропасть?

Ю. М. Лужков

Нам сейчас нужно отойти от края пропасти, на дне которой мы находимся.

А. Шохин

К днищу аппарата приварено отверстие.
Все в окопы, остальные за мной !
Впишем эллипс в квадрат, проведем касательную под углом 45 градусов к диаметру. Что вы ржете ?! Этой методикой давно уже в Штатах пользуются !

Армейские истории

Я спорю искренно и честно!
Я – чистой истины посредник.
И мне совсем неинтересно,
Что говорит мой собеседник!

И. Губерман.

Список литературы

[1] **Аристотель** *Аналитики первая и вторая* //М., Госполитиздат, 1952. 438с.

[2] **Арнольд В.И.** *Нужна ли в школе математика?* // Доклад на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» в Дубне 21 сентября 2000 года.

[3] **Арнольд В.И.** *Математическая дуэль вокруг Бурбаки* // Вестник РАН, том 72, № 3, с. 245-250 (2002). Новая школа, 1996. 320 с.

[4] **Гильберт Д., Аккерман В.** *Основы теоретической логики* // М.: ИЛ, 1947.

[5] **Гильберт Д.** *О понятии числа* // Основания геометрии. Москва, 1948, с.320-322

[6] **Гильберт Д.** *Математическое мышление. Статья в сборнике: Методологический анализ оснований математики* // М., Наука, 1988. — стр. 97—104

[7] **Ивин А.А.** *Логика. Учебник для гуманитарных факультетов* // М., ФАИР-ПРЕСС, 2002

[8] **Нагель Э., Ньюмен Д.Р.** *Теорема Геделя* // М., Знание, 1970.