

**ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ
"МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ"**

ТРЕТИЙ СЕМЕСТР. ЛЕКТОР А.Б.КОСТИН. ДЗ-П. (2009/2010 УЧЕБНЫЙ ГОД.)

**I. МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ.**

1. Найти все значения λ , при которых ранг следующей матрицы минимален:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 & 3 & \lambda \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти все значения λ , при которых ранг следующей матрицы максимален:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ \lambda + 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 - \lambda & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение (найти X):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} (X^T - 2E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решить матричное уравнение (найти X):

$$(X^T - 3E) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Решить матричное уравнение (найти X):

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} (X^T - 5E) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Решить матричное уравнение (найти X):

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (X^T - E) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 6 & -8 \\ -3 & 1 & 4 & -7 \\ -6 & -4 & -1 & 5 \\ -9 & 8 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 4 & -1 & -4 \\ 9 & 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

9. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

10. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

11. Найти общее решение системы и записать его в векторной форме:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 21x_4 = 13 \end{cases}$$

12. Найти общее решение системы и записать его в векторной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 16x_3 + 14x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 29x_3 + 21x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -2 \end{cases}$$

13. Найти общее решение однородной системы и записать его в векторной форме:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

14. Найти общее решение однородной системы и записать его в векторной форме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

II. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Найти частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ и дифференциал функции двух переменных:

а) $f(x, y) = \sin(xy) + x^2 - y^2$

б) $f(x, y) = x^y + \cos(x + y)$

2. Найти дифференциал функции двух переменных df , если:
- а) $f(x, y) = \arcsin(xy^2 + x + y)$
 - б) $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2 + x)$
 - в) $f(x, y) = \ln(x^2y - x)$
 - г) $f(x, y) = \cos^3(x^2 - y^2)$
3. Найти второй дифференциал функции двух переменных d^2f , если:
- а) $f(x, y) = x^4y^3 + xy - y^2 + 3x$
 - б) $f(x, y) = x^3y^2 + 2x^2 - 3xy + 1$
 - в) $f(x, y) = 2 + x^2y^3 - 3y^2 + x$
 - г) $f(x, y) = x^2y^5 - 2xy + 3$
4. Найти производную функции $f(x, y)$ в точке $M_0(\frac{\pi}{4}, 1)$ по направлению градиента функции $g(x, y)$ в точке $M_1(1, -1)$, если функции $f(x, y) = \operatorname{tg}(xy)$ и $g(x, y) = x^2 + y^2$.
5. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если:
- а) $z^2 + x^2 + y^2 = 9$, $M_0(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$
 - б) $z = 1 + \sin(x + y)$, $M_0(0, \frac{\pi}{2}, 2)$
6. Найти дифференциал сложной функции $z = f(u, v)$, если:
- а) $u = \cos(x^2 + y^2)$, $v = \frac{x}{y}$
 - б) $u = \sin(x^2 - y^2)$, $v = xy$
7. Найти точки экстремума функции двух переменных, указать характер экстремума и вычислить в них значение функции:
- а) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + \cos 1$
 - б) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y - 4 \operatorname{ch} 1$
 - в) $f(x, y) = 3xy - 2x^2 - 3y^2 + 7x - 9y + \ln 2$
 - г) $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 10x - 8y - \exp(\pi)$