

## Задачи Штурма-Лиувилля в простейшем случае

### 1. I рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0;$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0;$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0;$$

- При  $\lambda > 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_2 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X(l) = 0$  получаем, что  $\sqrt{\lambda} l = \pi n$  откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_2 = -c_1$ ,  $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$ . Поэтому из второго краевого условия  $X(l) = 0$  получаем, что  $c_1 = 0$ , т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_2 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_1 x$ . Поэтому из второго краевого условия  $X(l) = 0$  получаем, что  $c_1 = 0$ , т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

задачи (1.1).

### 2. II рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями II-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0;$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0;$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0;$$

- При  $\lambda > 0$  имеем из краевого условия  $X'(0) = 0$ , что  $c_1 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X'(l) = 0$  получаем, что  $\sqrt{\lambda}l = \pi k$  откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(множитель  $\frac{2}{l}$  появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную)

- При  $\lambda < 0$  имеем из краевого условия  $X'(0) = 0$ , что  $c_1 = c_2$ ,  $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}x \Rightarrow X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X'(l) = 0$  получаем, что  $c_1 = 0$ , т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $X'(0) = 0$ , что  $c_1 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_2$ . Второе краевое условие  $X'(l) = 0$  выполнено, поэтому задача Штурма-Лиувилля (??)-(??) имеет собственное число, равное нулю:  $\lambda_0 = 0$ . Ему соответствует собственная функция  $X_0(x) \equiv \frac{1}{l}$ .

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv \frac{1}{l}; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

задачи (2.1).

### 3. I рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка  $[0, l]$  и II-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_2 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow X'(x) = c_1\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X'(l) = 0$  получаем, что  $\sqrt{\lambda}l = \pi k - \frac{\pi}{2}$  откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_1 = -c_2$ ,  $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda} x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X'(l) = 0$  получаем, что  $c_1 = 0$ , т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_2 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_1 x$ . Второе краевое условие  $X'(l) = 0$  означает тогда, что  $c_1 = 0$ , поэтому задача Штурма-Лиувилля (3.1) не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \left( \frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

задачи (3.1).

## 4. II рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием II-го рода на левом конце отрезка  $[0, l]$  и I-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  имеем из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) = 0$ , что  $c_1 = 0$ ,  $\Rightarrow \mathbf{X}(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X(l) = 0$  получаем, что  $\sqrt{\lambda} l = \pi \left( -\frac{1}{2} + k \right)$  откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_k = \left( \frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_k(x) = \cos \left( \frac{\pi(2k-1)}{2l} x \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

- При  $\lambda < 0$  имеем из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) = 0$ , что  $c_1 = c_2$ ,  $\Rightarrow \mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x$ . Поэтому из второго краевого условия  $\mathbf{X}(l) = 0$  получаем, что  $c_1 = 0$ , т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет нетривиальных решений при  $\lambda < 0$ .
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) = 0$ , что  $c_1 = 0$ ,  $\Rightarrow \mathbf{X}(x) = c_2$ . Поэтому из второго краевого условия  $\mathbf{X}(l) = 0$  получаем, что  $c_2 = 0$ , т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет нетривиальных решений при  $\lambda = 0$ .

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_k = \left( \frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos \left( \frac{\pi(2k-1)}{2l} x \right), \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

задачи (4.1).

## 5. I рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка  $[0, l]$  и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0, \quad h > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  из краевого условия  $X(0) = 0$  следует, что

$$c_2 = 0, \Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Поэтому из второго краевого условия  $X'(l) + hX(l) = 0$  получаем, что  $\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) + h \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$ , откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы  $(\pm 1)$ , и равенство не было бы выполнено)

$$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l)$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  задача Штурма-Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $X(0) = 0$ , что  $c_2 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_1 x \Rightarrow X'(x) = c_1$ , и второе краевое условие  $X'(l) + hX(l) = 0$  даёт требование  $c_1 + c_1 h l = 0$ , откуда  $c_1 = 0$ , и у данной задачи нет нетривиальных решений при  $\lambda = 0$ .

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \quad X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

задачи (5.1).

## 6. II рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием II-го рода на левом конце отрезка  $[0, l]$  и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) + hX(l) = 0, \end{cases} \quad h > 0. \quad (6.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

И из краевого условия  $X'(0) = 0$  следует, что  $c_1 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$ . Поэтому из второго краевого условия  $X'(l) + hX(l) = 0$  получаем, что  $-\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) + h \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0$ , откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы  $(\pm 1)$ , и равенство не было бы выполнено)

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l) = h$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n} l) = h, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  задача Штурма-Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $X'(0) = 0$ , что  $c_1 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_2 \Rightarrow X'(x) = 0$ , и второе краевое условие  $X'(l) + hX(l) = 0$  даёт требование  $c_2 = 0$ , т.е. данная задача Штурма-Лиувилля при  $\lambda = 0$  также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n} l) = h, \quad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.2)$$

задачи (6.1).

## 7. III рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием III-го рода на левом конце отрезка  $[0, l]$  и I-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - hX(0) = X(l) = 0, \end{cases} \quad h > 0. \quad (7.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

И из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) + hX(0) = 0$  следует, что

$$\sqrt{\lambda} c_1 - h c_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = h \frac{c_2}{c_1}.$$

С другой стороны, из второго краевого условия  $X(l) = 0$  получаем, что

$$c_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0 \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = -\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l).$$

Из двух последних равенств, наконец, получаем:

$$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \quad \sqrt{\lambda} c_1 - h c_2 = 0.$$

Уравнение  $\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l)$ , как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений  $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$ . Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda_n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  задача Штурма-Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) - hX(0) = 0$ , что  $c_1 - h c_2 = 0, \Rightarrow X(x) = c_2(hx + 1)$ , и второе краевое условие  $X(l) = 0$  даёт требование  $c_2(hl + 1) = 0$ . Отсюда  $c_2 = c_1 = 0$  (поскольку  $hl > 0$  по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих  $\lambda = 0$  нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \\ X_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda_n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (7.2)$$

задачи (7.1).

## 8. III рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием III-го рода на левом конце отрезка  $[0, l]$  и II-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - h\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0, \end{cases} \quad h > 0. \quad (8.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

И из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) - h\mathbf{X}(0) = 0$  следует, что

$$\sqrt{\lambda} c_1 - h c_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = h \frac{c_2}{c_1}.$$

С другой стороны, из второго краевого условия  $X'(l) = 0$  получаем, что

$$c_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l).$$

Из двух последних равенств, наконец, получаем:

$$\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l), \quad \sqrt{\lambda} c_1 = h c_2.$$

Уравнение  $\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l)$ , как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений  $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$ . Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda_n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  задача Штурма-Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) - h\mathbf{X}(0) = 0$ , что  $c_1 - h c_2 = 0, \Rightarrow X(x) = c_2(hx + 1)$ , и второе краевое условие  $X(l) = 0$  даёт требование  $c_2(hl + 1) = 0$ . Отсюда  $c_2 = c_1 = 0$  (поскольку  $hl > 0$  по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих  $\lambda = 0$  нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l), \\ X_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda_n} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (8.2)$$

задачи (9.1).

## 9. III рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями III-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - H\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0, \end{cases} \quad H, h > 0. \quad (9.1)$$

Общее решение уравнения  $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При  $\lambda > 0$  имеем

$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

И из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) - H\mathbf{X}(0) = 0$  следует, что

$$\sqrt{\lambda} c_1 - H c_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = H \frac{c_2}{c_1}.$$

С другой стороны, из второго краевого условия  $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$  получаем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} (c_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda} l)) + h (c_1 \sin(\sqrt{\lambda} l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} l)) &= 0 \Rightarrow \\ c_1 (\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) + h \sin(\sqrt{\lambda} l)) + c_2 (-\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) + h \cos(\sqrt{\lambda} l)) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} &= \frac{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) + h \sin(\sqrt{\lambda} l)}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) - h \cos(\sqrt{\lambda} l)}. \end{aligned}$$

Из двух последних равенств получаем:

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{H} = \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) + 1}{\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l)},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) \cdot \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{H} + \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \right) = \frac{\lambda}{Hh} - 1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Итак,

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) \cdot \frac{Hh}{\sqrt{\lambda}(H+h)}$$

и, наконец,

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) = \frac{H}{H+h} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right). \quad (9.2)$$

Другим способом уравнение для нахождения  $\lambda$  можно получить из

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) + h \sin(\sqrt{\lambda} l)}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) - h \cos(\sqrt{\lambda} l)} = -\operatorname{tg}(\alpha + \sqrt{\lambda} l),$$

где

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + h^2}.$$

Тогда, вспомнив, что  $\sqrt{\lambda} = H \frac{c_2}{c_1}$ , получим:

$$\sqrt{\lambda} = -H \operatorname{tg} \left( \alpha + \sqrt{\lambda} l \right), \quad \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + h^2}. \quad (9.3)$$

Каждое из уравнений (9.2) и (9.3), как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много положительных решений  $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) = \frac{H}{H+h} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = H \sin \left( \sqrt{\lambda_n} x \right) + \sqrt{\lambda_n} \cdot \cos \left( \sqrt{\lambda_n} x \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При  $\lambda < 0$  задача Штурма-Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При  $\lambda = 0$  имеем из краевого условия  $\mathbf{X}'(0) - H\mathbf{X}(0) = 0$ , что  $c_1 - Hc_2 = 0$ ,  $\Rightarrow X(x) = c_2(Hx + 1)$ , и второе краевое условие  $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$  даёт требование  $c_2(H + hHl + h) = 0$ . Отсюда  $c_2 = c_1 = 0$  (поскольку  $H, h, l > 0$  по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих  $\lambda = 0$  нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения} \quad \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) = \frac{H}{H+h} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) \\ X_n(x) = H \sin \left( \sqrt{\lambda_n} x \right) + \sqrt{\lambda_n} \cdot \cos \left( \sqrt{\lambda_n} x \right), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (9.4)$$

задачи (9.1).

## 10. Разложение функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля

**Теорема 10.1** (В.А. Стеклов).

**Усл.**  $\{\mathbf{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$  – ортогональная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

**Утв.**  $\forall f(x) \in C^2[a, b]$ , удовлетворяющей краевым условиям,  $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x),$$

причём последний ряд сходится к  $f(x)$  абсолютно и равномерно на  $[a, b]$ , а для  $c_k$  верно представление

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) \mathbf{X}_k(x) dx}{\int_a^b \mathbf{X}_k^2(x) dx}$$

*Доказательство.* Выведем формулу для вычисления  $c_k$ .

В силу общих свойств рядов Фурье, их (как сходящиеся равномерно на любом отрезке, где нет точек разрыва  $f(x)$ ) можно интегрировать почленно. Поэтому, в силу ортогональности системы  $\{\mathbf{X}_k\}$  в  $L_2[0, l]$ :

$$(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_n)_{L_2[0, l]} \equiv \int_0^l \mathbf{X}_k(x) \mathbf{X}_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \|\mathbf{X}_n\|^2, & \text{при } k = n. \end{cases} \quad (10.1)$$

Предположим, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x)$  действительно сходится на  $[0, l]$  к функции  $f(x)$ , то есть верно равенство:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x), \quad x \in [0, l].$$

Домножим это равенство на  $\mathbf{X}_n$  в смысле скалярного произведения в  $L_2[0, l]$ , то есть

- домножим его на  $\mathbf{X}_n$  и
- проинтегрируем по  $[0, l]$ .

В силу (10.1), получим

$$(f, \mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_n) = c_n (\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_n) = c_n \|\mathbf{X}_n\|^2.$$

Отсюда сразу получается доказываемая формула

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2}.$$

□

В силу данной теоремы, нам достаточно один раз вычислить  $\|\mathbf{X}_k\|^2$  для каждой задачи Штурма-Лиувилля, чтобы знать вид коэффициентов разложения  $c_k$ .

## 11. Коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля

### 11.1. I–I

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \left( \frac{\pi k x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi k x}{l} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( x \Big|_0^l - \underbrace{\frac{l}{2\pi k} \sin \left( \frac{2\pi k x}{l} \right)}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

**11.2. I–II**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \left( \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi(2k-1)x}{l} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( x \Big|_0^l - \underbrace{\frac{l}{\pi(2k-1)} \sin \left( \frac{\pi(2k-1)x}{l} \right)}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

**11.3. I–III**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \sin^2 (\sqrt{\lambda_k} x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos (2\sqrt{\lambda_k} x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( x \Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin (2\sqrt{\lambda_k} x) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \\ &= \left[ \sqrt{\lambda_k} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( l + \frac{2 \sin(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(\sqrt{\lambda_k} l)}{2h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( l + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda_k} l)}{h} \right) = \\ &= \left[ \cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l) = -\frac{\sqrt{\lambda_k}}{h} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( l + \frac{1}{h(1 + \frac{\lambda_k}{h^2})} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( l + \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \right) = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + h}{2(h^2 + \lambda_k)}. \end{aligned}$$

**11.4. II–I**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \cos^2 \left( \frac{\pi(2k-1)x}{2l} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi(2k-1)x}{l} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( x \Big|_0^l + \underbrace{\frac{l}{\pi(2k-1)} \sin \left( \frac{\pi(2k-1)x}{l} \right)}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

**11.5. II–II**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \cos^2 \left( \frac{\pi kx}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi kx}{l} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( x \Big|_0^l + \underbrace{\frac{l}{2\pi k} \sin \left( \frac{2\pi kx}{l} \right)}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

## 11.6. II–III

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \cos^2(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 + \cos(2\sqrt{\lambda_k} x)\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(2\sqrt{\lambda_k} x) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{1}{2} \left( l + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l)}{2\sqrt{\lambda_k}} \right).\end{aligned}$$

откуда, пользуясь тождествами  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$ ,  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ , получаем:

$$\begin{aligned}l + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l)}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \sqrt{\lambda_k} = \frac{h}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l)} \right] = l + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(\sqrt{\lambda_k} l)}{h} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l) = \\ &= l + \frac{\sin^2(\sqrt{\lambda_k} l)}{h} = l + \frac{1 - \cos^2(\sqrt{\lambda_k} l)}{h} = \left[ \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right] = \\ &= l + \frac{1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)}}{h} = \left[ \operatorname{tg}^2(\sqrt{\lambda_k} l) = \frac{h^2}{\lambda_k} \right] = l + \frac{1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_k + h^2}}{h} = \\ &= l + \frac{h^2}{h(\lambda_k + h^2)} = \frac{l(\lambda_k + h^2) + h}{\lambda_k + h^2}.\end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l(\lambda_k + h^2) + h}{\lambda_k + h^2}.$$

## 11.7. III–I

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \left( h \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \right)^2 dx = \left[ \alpha = \arccos \frac{h}{\sqrt{h^2 + \lambda_k}} \right] = \\ &= (h^2 + \lambda_k) \int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_k} x + \alpha) dx = \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos(2\sqrt{\lambda_k} x + 2\alpha) \right) dx = \\ &= \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( x \Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(2\sqrt{\lambda_k} x + 2\alpha) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \\ &= \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} \right).\end{aligned}$$

Преобразуем выражения  $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$  и  $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \sqrt{\lambda_k} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l) \right] = \frac{2 \sin(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(\sqrt{\lambda_k} l)}{-2h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l)} \cos(2\alpha) = \\ &= -\frac{1}{h} \cos^2(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(2\alpha) = \left[ \cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right] = -\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_k}{h^2}} \cos(2\alpha) = \\ &= \left[ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k} \right] = -\frac{h}{h^2 + \lambda_k} \cdot \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right] = \\
 &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)}{1 + \operatorname{tg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[ \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l) = -\frac{\sqrt{\lambda_k}}{h} \right] = \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \\
 &= \left[ \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \right] = \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \cdot \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l - \frac{-\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} \right) = \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l + \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \right) = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + h}{2}.$$

### 11.8. III–II

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \left( h \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \right)^2 dx = \left[ \alpha = \arccos \frac{h}{\sqrt{h^2 + \lambda_k}} \right] = \\
 &= (h^2 + \lambda_k) \int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_k} x + \alpha) dx = \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos(2\sqrt{\lambda_k} x + 2\alpha) \right) dx = \\
 &= \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( x \Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(2\sqrt{\lambda_k} x + 2\alpha) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \\
 &= \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} \right).
 \end{aligned}$$

Преобразуем выражения  $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$  и  $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \sqrt{\lambda_k} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k} l) \right] = \frac{2 \sin(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(\sqrt{\lambda_k} l)}{2h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k} l)} \cos(2\alpha) = \\
 &= \frac{1}{h} \sin^2(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(2\alpha) = \left[ \sin^2 \beta = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} \right] = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_k}{h^2}} \cos(2\alpha) = \\
 &= \left[ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k} \right] = \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \cdot \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta = 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = -\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \beta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} \right] = \\
 &= -\frac{1 - \operatorname{ctg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)}{1 + \operatorname{ctg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[ \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k} l) = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{h} \right] = -\frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \\
 &= \left[ \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \right] = -\frac{h}{h^2 + \lambda_k} \cdot \frac{h^2 - \lambda_k}{h^2 + \lambda_k}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l - \frac{-\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} \right) = \frac{h^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l + \frac{h}{h^2 + \lambda_k} \right) = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + h}{2}.$$

## 11.9. III–III

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{X}_k\|^2 &= \int_0^l \left( H \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \right)^2 dx = \left[ \alpha = \arccos \frac{H}{\sqrt{H^2 + \lambda_k}} \right] = \\
 &= (H^2 + \lambda_k) \int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_k} x + \alpha) dx = \frac{H^2 + \lambda_k}{2} \int_0^l \left( 1 - \cos(2\sqrt{\lambda_k} x + 2\alpha) \right) dx = \\
 &= \frac{H^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( x \Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \sin(2\sqrt{\lambda_k} x + 2\alpha) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \\
 &= \frac{H^2 + \lambda_k}{2} \cdot \left( l - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} \right).
 \end{aligned}$$

Преобразуем выражения  $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$  и  $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k} l) = \frac{1}{H+h} \cdot \frac{\lambda_k - Hh}{\sqrt{\lambda_k}} \right] = \\
 &= \frac{H+h}{\lambda_k - Hh} \cdot \frac{2 \sin(\sqrt{\lambda_k} l) \cos(\sqrt{\lambda_k} l)}{2 \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k} l)} \cos(2\alpha) = \frac{H+h}{\lambda_k - Hh} \cdot \cos^2(\sqrt{\lambda_k} l) \cdot \cos(2\alpha) = \\
 &= \left[ \cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} \right] = \\
 &= \frac{H+h}{\lambda_k - Hh} \cdot \frac{(\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k (H+h)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k (H+h)^2}} \cdot \cos(2\alpha) = \\
 &= \left[ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{H^2 - \lambda_k}{H^2 + \lambda_k} \right] = \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H^2 - \lambda_k}{H^2 + \lambda_k}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} &= \left[ \cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta = 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = -\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \beta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} \right] = \\
 &= -\frac{1 - \operatorname{ctg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)}{1 + \operatorname{ctg}^2(\sqrt{\lambda_k} l)} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[ \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k} l) = \frac{\lambda_k - Hh}{\sqrt{\lambda_k}(H+h)} \right] = \\
 &= -\frac{\lambda_k (H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \\
 &= \left[ \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{H}{H^2 + \lambda_k} \right] = -\frac{\lambda_k (H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H}{H^2 + \lambda_k}.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \\
 & = \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)}{\lambda_k(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H^2 - \lambda_k}{H^2 + \lambda_k} - \frac{\lambda_k(H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H}{H^2 + \lambda_k} - \frac{H}{H^2 + \lambda_k} = \\
 & = \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)(H^2 - \lambda_k) - H(\lambda_k(H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2) - H(\lambda_k(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2)}{(\lambda_k(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2)(H^2 + \lambda_k)} = \\
 & = \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)(H^2 - \lambda_k) - 2H\lambda_k(H+h)^2}{\underbrace{(\lambda_k(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2)}_{=(H^2 + \lambda_k)(h^2 + \lambda_k)}} (H^2 + \lambda_k) = \\
 & = \frac{(H+h) \left( -\lambda_k^2 + \lambda_k H(H+h) - H^3 h - 2H\lambda_k(H+h) \right)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)} = \\
 & = \frac{-(H+h) \left( \lambda_k^2 + \lambda_k H(H+h) + H^3 h \right)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)} = \frac{-(H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)}.
 \end{aligned}$$

Наиболее простой вид это выражение принимает при  $H = h$ . В этом случае (он встречается в № 653, 658, 693)

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} l) \cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k} l) \sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = -\frac{2h}{h^2 + \lambda_k}.$$

Итак, в общем случае (при  $H \neq h$ )

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k) + (H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{2(H^2 + \lambda_k)(h^2 + \lambda_k)}.$$

А в случае  $H = h$

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + 2h}{2}.$$

## 12. Таблица собственных чисел и функций задач Штурма – Лиувилля с различными краевыми условиями

Кр. усл.	Собственные числа и функции
I – I	$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
I – II	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
I – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \\ X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$
II – I	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$
II – II	$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
II – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda_n} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n} l) = h, \\ X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – I	$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \\ X_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – II	$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l), \\ X_n(x) = h \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 & - \text{решения уравнения } \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l) = \frac{H}{H+h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ X_n(x) = H \sin(\sqrt{\lambda_n} x) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} x), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

13. Таблица норм собственных функций задач Штурма – Лиувилля с различными краевыми условиями

Кр. усл.	$\ \mathbf{X}_k\ ^2$
I – I	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
I – II	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
I – III	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + h}{2(h^2 + \lambda_k)}$
II – I	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
II – II	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
II – III	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l(\lambda_k + h^2) + h}{\lambda_k + h^2}$
III – I	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + h}{2}$
III – II	$\ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + h}{2}$
III – III	$\left\{ \begin{array}{l} \ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k) + (H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{2(H^2 + \lambda_k)(h^2 + \lambda_k)} \\ \text{в случае } H = h \quad \ \mathbf{X}_k\ ^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + 2h}{2} \end{array} \right.$