ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ "ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ"

Первый семестр. Лектор А.Б.Костин. Д1-п, 2009 г.

I. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ.

1. Функция $y = |x|$ и ее свойства. Построить графики:

$$y = x + |x|, \qquad y = x|x|, \qquad y = \frac{x}{|x|}, \qquad y = \frac{x^2}{|x|}.$$

2. Сформулировать свойства модуля вещественного числа. Нарисовать на плоскости график уравнения $|x| + |y| = a$, где $a > 0$ - параметр.

3. Понятие неявной функции и ее графика. Пример: уравнение и график эллипса. Нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству:

$$1 \le x^2 + \frac{y^2}{9} \le 9.$$

4. Функция $y = e^x$ и ее график. Построить графики гиперболических функций $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус, а $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус. Доказать гиперболические тождества:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

5. Функция $y = \log_a x$ и ее график. Построить график функции $y = \log_{|x|} 2$.

6. Основные тригонометрические фунции и их графики. Для функции $y = \sin(\frac{1}{x}), x \neq 0$ найти точки максимумов, минимумов и нулей, построить примерный график.

7. Важнейшие тригонометрические соотношения. Решение тригонометрических неравенств:

$$\sin x \le \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} x \ge 1, \qquad \cos(\pi - x) \operatorname{tg} x(\sqrt{3} + 2 \sin x) \le 0.$$

II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

8. Равные векторы и их геометрическая интерпретация. В параллелограмме $ABCD$ даны три вершины $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$. Определить координаты четвертой вершины D, противоположной вершине C.

9. В пространстве даны два произвольных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых точки пересечения диагоналей есть O и O_1 соответственно. Доказать, что

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}\Big(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}\Big).$$

10. Точка M является точкой пересечения медиан в треугольнике ABC. Доказать, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. (Указание: точка M делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины.)

11. Скалярное произведение и его свойства. С помощью скалярного произведения доказать тождество $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = 2\left(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2\right)$. Объяснить его геометрический смысл.

12. В треугольнике ABC проведена высота BH. Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$.

13. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE. Выразить вектор $\overrightarrow{BE}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}$.

14. Пусть $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2\}$ - неколлинеарные векторы на плоскости (координаты декартовы). Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на этих векторах вычисляется по формуле $S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

15. Векторное произведение и его свойства. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ удовлетворяют условию $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$. Доказать, что$[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]=[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]=[\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}]$.

16. Дать определение смешанного произведения. Доказать, что $|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|\le|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$. При каком условии здесь имеет место знак равенства?

17. Показать, что координаты вектора $\overrightarrow{r}$ относительно произвольного базиса $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ задаются равенствами:
$$\lambda_1=\frac{(\overrightarrow{r},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})},\quad \lambda_2=\frac{(\overrightarrow{r},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1})}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})},\quad \lambda_3=\frac{(\overrightarrow{r},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})}{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}.$$
Как преобразуются эти формулы, если $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ образуют декартов базис?

18. В базисе $\overrightarrow{e_1}=\{1;-2\},\overrightarrow{e_2}=\{2,1\}$ (не ОНБ) на плоскости, вектор $\overrightarrow{a}=\{1;-4\}$ задан своими координатами. Найти проекцию $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{c}$, направленный по биссектрисе угла между $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.

III. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

19. Общее уравнение плоскости. Составить уравнение плоскости, если заданы две симметрично расположенные относительно нее точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

20. Найти объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $ax+by+cz+d=0$, где $abcd\neq0$.

21. Формула для нахождения расстояния от точки до плоскости. Найти расстояние между параллельными плоскостями $ax+by+cz+d=0$ и $ax+by+cz+d_1=0$.

22. Даны два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$, $\overrightarrow{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Указать геометрическое место точек $M(x,y,z)$, определяемых уравнением:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.$$
Ответить на тот же вопрос, если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны.

23. Параметрическое уравнение прямой в пространстве. При каком соотношении между коэффициентами прямая
$$x=x_0+at,\quad y=y_0+bt,\quad z=z_0+ct,\quad t\in\mathbf{R},$$
параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и при каком соотношении принадлежит указанной плоскости?

24. Две параллельные прямые с общим направляющим вектором $\overrightarrow{a}$ проходят через точки M_0 и M_1, соответственно. Показать, что расстояние между прямыми может быть вычислено по формуле
$$d=\frac{|[\overrightarrow{a},\overrightarrow{M_0M_1}]|}{|\overrightarrow{a}|}.$$

IV. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

25. Понятие предела последовательности. Дать определения:
$$\lim_{n\to\infty}x_n=5,\quad \lim_{n\to\infty}x_n\neq5,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_n\neq+\infty.$$
Привести пример последовательности на каждую из перечисленных ситуаций.

26. Понятие монотонной последовательности. Число e как предел последовательности. Вычислить следующие пределы
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{\sqrt{n}+a}-\sqrt[3]{\sqrt{n}+b}\right),\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-an+1}{n^2-1}\right)^n.$$

NB. При ответе на вопрос привести формулировки всех определений, утверждений, формул и фактов, необходимых для решения задачи.