Занятие 10 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

Тема занятия: смешанное произведение

873. Даны векторы $\vec{a} = \{1;\ -1;\ 3\}$, $\vec{b} = \{-2;\ 2;\ 1\}$ и $\vec{c} = \{3;\ -2;\ 5\}$. Вычислить $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$.

Ответ: -7.

867. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $30°$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$.

Ответ: ± 27. Знак «+» – если тройка $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – правая, знак «–» – если левая.

869. Доказать тождество $\left(\vec{a}+\vec{b},\ \ \vec{b}+\vec{c},\ \ \vec{c}+\vec{a}\right) = 2\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$.

874. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, если

1) $\vec{a} = \{2;\ 3;\ -1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{c} = \{1;\ 9;\ -11\}$;
2) $\vec{a} = \{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{2;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c} = \{3;\ -1;\ -2\}$;
3) $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -3\}$ и $\vec{c} = \{3;\ -4;\ 7\}$.

Ответ: **1)** компланарны; **2)** не компланарны; **3)** компланарны.

I. $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ -1;\ 3)$, $C(\lambda;\ 0;\ \lambda)$, $D(4;\ 3;\ 2)$. При каком значении $\lambda \in \mathbb{R}$ точки A, B, C, D находятся в одной плоскости?

Ответ: $\lambda = 3/2$.

876. Вычислить объём тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2;\ -1)$ и $D(4;\ 1;\ 3)$.

Ответ: 3.

877. Даны вершины тетраэдра $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$ и $D(-5;\ -4;\ 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Ответ: 11.

878. Объём тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках

$$A(2;\ 1;\ -1),\quad B(3;\ 0;\ 1),\quad C(2;\ -1;\ 3).$$

Найти координаты четвёртой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Ответ: $(0;\ 8;\ 0)$ или $(0;\ -7;\ 0)$.

II. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{a} = \{\alpha;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b} = \{1;\ \alpha;\ 1\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ \alpha\}$ образуют правую тройку? левую тройку? компланарны?

Ответ: при $\alpha \in (-2,\ 1) \cup (1, \infty)$ правая тройка; при $\alpha \in (-\infty,\ -2)$ левая тройка; при $\alpha = -2$ векторы компланарны; при $\alpha = 1$ векторы совпадают.

Д/з 10   для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

866. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$.

Ответ: 24.

874^M. Вычислить $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$, если

1) $\vec{a} = \{2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b} = \{1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ 1\}$;
2) $\vec{a} = \{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{0;\ 1;\ 1\}$, $\vec{c} = \{0;\ -1;\ -2\}$;
3) $\vec{a} = \{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -3\}$, $\vec{c} = \{1;\ 1;\ 0\}$;
4) $\vec{a} = \{1;\ 2;\ 2007\}$, $\vec{b} = \{1;\ 2;\ 2008\}$, $\vec{c} = \{0;\ 0;\ 1\}$.

Ответ: **1)** -2; **2)** -3; **3)** -6; **4)** 0.

870. Доказать, что равенство $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$ справедливо при любых числах λ и μ.

I. $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ -1;\ 1)$, $C(-1;\ -2;\ -1)$, $D(0;\ 0;\ \lambda)$. При каком значении $\lambda \in \mathbb{R}$ точка D находится в плоскости треугольника ABC?

Ответ: $\lambda = -3$.

II. Вычислить объём тетраэдра, образованного точками $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$, $D(4;\ 5;\ 6)$.

Ответ: 15/2 ед^2.

III. Повторение
$A(1;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ 1)$, $C(0;\ 3;\ 2)$. В треугольнике ABC найти вектор высоты $\overrightarrow{BH}$, опущенной из вершины B на сторону AC.

Ответ: $\overrightarrow{BH} = \dfrac{1}{9}\{-10;\ 2;\ -7\}$ (см. формулу в задаче 807 из занятия 7).

IV. При каких значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $\vec{a} = \{\lambda;\ 3;\ 3\}$, $\vec{b} = \{3;\ \lambda;\ 3\}$, $\vec{c} = \{3;\ 3;\ \lambda\}$ образуют правую тройку? левую тройку? компланарны?

Ответ: при $\lambda \in (-6,\ 3) \cup (3, \infty)$ правая тройка; при $\lambda \in (-\infty,\ -6)$ левая тройка; при $\lambda = -6$ векторы компланарны; при $\lambda = 3$ векторы совпадают.