Занятие 3 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

1) Вычислить:

(а) $\dfrac{3i}{1-i}$, (б) $\dfrac{1+2i}{2-i}$, (в) $\dfrac{(m+ni)(n+mi)}{n-mi}$, (г) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{15}$,

(д) $i-\dfrac{1}{i-\dfrac{1}{i-\frac{1}{i}}}$, (е) $z+\overline{z}$, где $z=\dfrac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}$.

<u>Отв</u>: (а) $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$, (б) i, (в) $-m+ni$, (г) -1, (д) $\dfrac{5}{3}i$, (е) $2\cos\alpha$.

2) Изобразить на плоскости:

(а) $\operatorname{Im} z=-3$, (б) $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Im} z$, (в) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$, (г) $|z+1|=1$,

(д) $2<|z-2i|<4$, (е) $|z-1|=|z-i|$.

3) Представить в тригонометрической форме:

(а) $3i$, (б) $-2+2i$, (в) $4-4\sqrt{3}i$, (г) $1-\sqrt{3}$, (д) $\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}$,

(е) $\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$, (ё) $1+i\operatorname{tg}\alpha$, где $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4) Возвести в степень:

(а) $\big(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ\big)^8$, (б) $\Big(\sqrt{2}(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)\Big)^6$, (в) $(2+2i)^5$,

(г) $(1-i)^{100}$, (д) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{100}$.

<u>отв</u>: (а) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, (б) $-4+4\sqrt{3}\,i$, (в) $-128-128i$, (г) -2^{50}, (д) 1.

5) Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-10|\leqslant 8$, найти то, аргумент которого имеет наибольшее возможное значение.

<u>отв</u>: $z=\dfrac{18}{5}+\dfrac{24}{5}i$.

Д/з 3

1) Доказать равенства $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

2) Вычислить:

(а) $\dfrac{5+3i}{2+i}$, (б) $\dfrac{(3+4i)(-1+3i)}{6-8i}$, (в) $\dfrac{i^{13}-i^{14}}{1+i^{15}}+i^{10}$, (г) $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i}$,

(д) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$.

отв: (а) $\dfrac{13}{5}+\dfrac{i}{5}$, (б) $-\dfrac{13}{10}-\dfrac{9i}{10}$, (в) $-1+i$, (г) $\dfrac{6}{5}$, (д) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$.

3) Изобразить на плоскости:

(а) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=0$, (б) $-2\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 3$, (в) $|z+2i|\leqslant 2$, (г) $|z|>|z-2|$,

(д) $\operatorname{Re}\left((1+i)z\right)\geqslant 0$.

4) Представить в тригонометрической форме:

(а) $-1-i$, (б) $16-16\sqrt{3}i$, (в) $-\sqrt{5}i$, (г) $3-\sqrt{10}$, (д) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$.

5) Возвести в степень:

(а) $(\sqrt{3}+i)^{30}$, (б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$, (в) $(i^{23}-i^{24})^{40}$, (г) $\left(\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}\right)^{n}$.

отв: (а) -2^{30}, (б) $2^{15}i$, (в) 2^{20}, (г) $\cos(2n\alpha)-i\sin(2n\alpha)$.