

Занятие 4 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

1) Изобразить на плоскости:

$$(a) |iz + 5| = 5, \quad (б) \left| \frac{iz - 1}{iz - 3} \right| = 1, \quad (в) \arg z^2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{\text{отв:}} (в) \arg z = \frac{\pi}{4} \text{ и } \arg z = \frac{5\pi}{4}.$$

2) Представить в тригонометрической форме:

$$(a) \frac{10 + 10i}{i}, \quad (б) \frac{i}{1 - i}, \quad (в) \sin \alpha + i \cos \alpha.$$

3) Представить в показательной форме:

$$(a) 2i, \quad (б) -\frac{i}{2}, \quad (в) 1 + i, \quad (г) -e^{-1}, \quad (д) ie^{\varphi i}, \quad (е) (2 - 2i)e^{\varphi i}.$$

4) Вычислить:

$$(a) \operatorname{Im}(e^{-i}), \quad (б) \operatorname{Re}(ie^{3i}), \quad (в) (2 + i)e^{5ti} + (2 - i)e^{-5ti}, \quad (г) bie^{\varphi i} - bie^{-\varphi i}.$$

$$\underline{\text{отв:}} (a) -\sin 1, \quad (б) -\sin 3, \quad (в) 4 \cos 5t - 2 \sin 5t, \quad (г) -2b \sin \varphi.$$

5) Найти комплексные корни уравнений:

$$(a) \lambda^2 + 9 = 0, \quad (б) \lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0, \quad (в) \lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0, \quad (г) 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0, \\ (д) (\lambda - 5)^2 + 4 = 0.$$

6) С помощью формул Эйлера вычислить сумму:

$$1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi. \quad \underline{\text{отв:}} \frac{\sin \frac{(n+1)\varphi}{2} \cdot \cos \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Д/з 4

1) Решить уравнения

(а) $|z| + z = 0$, (б) $z^2 + |\bar{z}| = 0$.

отв: (а) луч $y = 0, x \leq 0$, (б) $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i$.

2) Изобразить на плоскости:

(а) $\left| \frac{z}{iz - 10} \right| = 1$, (б) $|z|^2 + 2(z + \bar{z}) = 0$, (в) $\operatorname{Re} \frac{2}{z + 1} = 1$.

отв: (а) прямая $y = -5$, (б) окружность $(x + 2)^2 + y^2 = 4$,
(в) $x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (-1, 0)$.

3) Представить в тригонометрической форме:

(а) $-1 - \sqrt{3}i$, (б) $\frac{i}{10 + 10i}$, (в) $\frac{\pi - 3}{i}$, (г) $1 + \cos 2 - i \sin 2$.

4) Представить в показательной форме:

(а) -5 , (б) πi , (в) $\frac{1 - i}{1 + i}$, (г) $-e^i$, (д) $\frac{e^i}{5i}$.

5) Найти комплексные корни уравнений:

(а) $\lambda^2 + 5 = 0$, (б) $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$, (в) $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$, (г) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$,
(д) $(\lambda + 3)^2 + 9 = 0$.

отв: (а) $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}$, (б) $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$, (в) $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$, (г)
 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
(д) $\lambda_{1,2} = -3 \pm 3i$.

6) С помощью формул Эйлера вычислить сумму:

$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$. отв: $\frac{\sin \frac{(n+1)\varphi}{2} \cdot \sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$.