Занятие 7 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

Тема занятия: скалярное произведение

795. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}\,| = 3$ и $|\vec{b}\,| = 4$, вычислить: **1)** $\vec{a}\,\vec{b}$; **2)** $\vec{a}^{\,2}$; **3)** $\vec{b}^{\,2}$; **4)** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$; **5)** $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$; **6)** $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$; **7)** $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2$.

Ответ: **1)** -6; **2)** 9; **3)** 16; **4)** 13; **5)** -61; **6)** 37; **7)** 73.

797. Доказать справедливость тождества $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$ и выяснить его геометрический смысл.

801. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Зная, что $|\vec{a}\,| = 3$, $|\vec{b}\,| = 1$ и $|\vec{c}\,| = 4$, вычислить: $\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}\,\vec{c}+\vec{c}\,\vec{a}$.

Ответ: -13.

807. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение вектора,приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD, по базису $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ответ: $\overrightarrow{BD} = \dfrac{(\vec{b},\,\vec{c}\,)}{c^2}\,\vec{c}-\vec{b}$.

817. Даны четыре точки: $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ -9)$ и $D(-5;\ 5;\ 3)$. Доказать, что отрезки AC и BD взаимно перпендикулярны.

823. Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \left\{6;\ -8;\ -7\frac{1}{2}\right\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

Ответ: $\vec{x} = \{-24;\ 32;\ 30\}$.

829. Найти проекцию вектора $\vec{s} = \{4;\ -3;\ 2\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Ответ: $\sqrt{3}$.

831^M. Даны точки $A(3;\ -2;\ -4)$, $B(2;\ -2;\ 5)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 135^\circ$, а с осью Oz – тупой угол γ.

Ответ: -5.

833. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислить $\mathbf{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Ответ: -4.

825. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|\vec{x}\,| = 14$.

Ответ: $\vec{x} = -4\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k}$.

827. Даны векторы $\vec{a} = \{3;\ -1;\ 5\}$ и $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -3\}$. Найти вектор $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям: $\vec{x}\,\vec{a} = 9$, $\vec{x}\,\vec{b} = -4$.

Ответ: $\vec{x} = \{2;\ -3;\ 0\}$.

Д/з 7 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

796. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}\,| = 3$, $|\vec{b}\,| = 5$ и $|\vec{c}\,| = 8$, вычислить:
1) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{b} + 3\vec{c}\right)$; **2)** $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2$; **3)** $\left(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}\right)^2$.

Ответ: **1)** -62; **2)** 162; **3)** 373.

800. Даны единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Вычислить: $\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}$.

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

801. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$. Зная, что $|\vec{a}\,| = 3$, $|\vec{b}\,| = 1$ и $|\vec{c}\,| = 4$, вычислить: $\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}$.

Ответ: -13.

804. Какому словию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a} - \vec{b}$?

Ответ: $|\vec{a}\,| = |\vec{b}\,|$.

808. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$; зная, что $|\vec{a}\,| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}\,| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

812. Даны векторы $\vec{a} = \{4;\ -2;\ -4\}$ и $\vec{b} = \{6;\ -3;\ 2\}$. Вычислить:
1) $\vec{a}\,\vec{b}$; **2)** $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$; **3)** $\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$; **4)** $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$; **5)** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; **6)** $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$.

Ответ: **1)** 22; **2)** 6; **3)** 7; **4)** -200; **5)** 129; **6)** 41.

818. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\alpha = -6$.

824. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2;\ 1;\ -1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\,\vec{a} = 3$.

Ответ: $\vec{x} = \left\{1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$.

832. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{5;\ 2;\ 5\}$ на ось вектора $\vec{b} = \{2;\ -1;\ 2\}$.

Ответ: 6.

834. Даны векторы $\vec{a} = \{1;\ -3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{3;\ -4;\ 2\}$ и $\vec{c} = \{-1;\ 1;\ 4\}$.
Вычислить $\mathbf{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

Ответ: 5.