Занятие 9 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

Тема занятия: векторное произведение

865. Определить, является ли тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правой или левой, если

1) $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}$;
3) $\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{k}$;
5) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{j}$;
2) $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}$;
4) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$;
6) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$.

I. Вычислить координаты векторного произведения $[\,\vec{a},\ \vec{b}\,]$, если:

а) $\vec{a}=\{1;\,0;\,0\}$, $\vec{b}=\{0;\,1;\,0\}$;
д) $\vec{a}=\{1;\,0;\,1\}$, $\vec{b}=\{0;\,1;\,0\}$;
б) $\vec{a}=\{1;\,0;\,0\}$, $\vec{b}=\{0;\,0;\,1\}$;
е) $\vec{a}=\{1;\,-1;\,2\}$, $\vec{b}=\{1;\,0;\,-3\}$;
в) $\vec{a}=\{1;\,2;\,3\}$, $\vec{b}=\{4;\,5;\,6\}$;
ж) $\vec{a}=\{-2;\,0;\,2\}$, $\vec{b}=\{1;\,2;\,3\}$;
г) $\vec{a}=\{4;\,5;\,6\}$, $\vec{b}=\{1;\,2;\,3\}$;
з) $\vec{a}=\{1;\,2;\,3\}$, $\vec{b}=\{2;\,4;\,6\}$;

851. Даны точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Найти координаты векторных произведений:

$$\textbf{1)}\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right], \qquad \textbf{2)}\ \left[\overrightarrow{BC}-2\,\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right].$$

857. Даны точки $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

861. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}=\{8,\ -15,\ 3\}$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{m}|=51$, найти его координаты.

841. Даны: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}\,|=26$ и $\left|[\vec{a},\ \vec{b}]\right|=72$. Вычислить $(\vec{a},\ \vec{b}\,)$.

843. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}\,|=1$, $|\vec{b}|=2$, вычислить:

$$\textbf{1)}\ [\vec{a},\ \vec{b}]^2, \quad \textbf{2)}\ \left[(2\vec{a}+\vec{b}\,),\ (\vec{a}+2\vec{b})\right]^2, \quad \textbf{3)}\ \left[(\vec{a}+3\vec{b}),\ (3\vec{a}-\vec{b}\,)\right]^2.$$

845. Доказать тождество $[\vec{a},\ \vec{b}]^2+(\vec{a},\ \vec{b}\,)^2=\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2}$.

II. Даны точки $A(1;\ -1;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ 2)$ и $C(3;\ 2;\ 3)$. Вычислить площади всех трёх параллелограммов, имеющих вершины в этих точках. Объяснить результат.

Ответы

№ 865. 1) правая, 2) левая, 3) левая, 4) правая, 5) векторы компланарны, 6) левая.
I. а) $\{0;\,0;\,1\}$, б) $\{0;\,-1;\,0\}$, в) $\{-3;\,6;\,-3\}$, г) $\{3;\,-6;\,3\}$, д) $\{-1;\,0;\,1\}$, е) $\{3;\,5;\,1\}$, ж) $\{-4;\,8;\,-4\}$, з) $\{0;\,0;\,0\}$.
№ 851. 1) $\{6;\,-4;\,-6\}$, 2) $\{-12;\,8;\,12\}$.
№ 857. 14.
№ 861. $\{45;\,24;\,0\}$.
№ 841. ±30.
№ 843. 1) 3, 2) 27, 3) 300.
II. $S=\sqrt{11}$ для всех параллелограммов.

Д/з 9 для групп Д1–01, Д1–02, Д1–03, Д1–04

842. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}\,| = 3$, $|\vec{b}\,| = 4$, вычислить:

$$\textbf{1)}\quad \left|\left[(\vec{a}+\vec{b}),\ (\vec{a}-\vec{b})\right]\right|, \qquad \textbf{2)}\quad \left|\left[(3\vec{a}-\vec{b}),\ (\vec{a}-2\vec{b})\right]\right|.$$

Ответ: **1)** 24, **2)** 60.

844. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны?

Ответ: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть коллинеарны.

848. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Доказать, что

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = [\vec{b},\ \vec{c}] = [\vec{c},\ \vec{a}].$$

850. Даны векторы $\vec{a} = \{3;\ -1;\ -2\}$ и $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -1\}$; Найти координаты векторных произведений:

$$\textbf{1)}\ [\vec{a},\ \vec{b}], \qquad \textbf{2)}\ [2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}], \qquad \textbf{3)}\ [2\vec{a}-\vec{b},\ 2\vec{a}+\vec{b}].$$

Ответ: **1)** $\{5;\ 1;\ 7\}$, **2)** $\{10;\ 2;\ 14\}$, **3)** $\{20;\ 4;\ 28\}$.

858. Даны вершины треугольника $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$ и $C(1;\ 3;\ -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Ответ: 5.

860. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4,\ -2,\ -3\}$ и $\vec{b} = \{0,\ 1,\ 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

Ответ: $\{-6;\ -24;\ 8\}$.

862. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2,\ -3,\ 1\}$ и $\vec{b} = \{1,\ -2,\ 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right) = 10$.

Ответ: $\{7;\ 5;\ 1\}$.

864. Даны векторы $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{b} = \{-3;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c} = \{1;\ 2;\ 3\}$. Вычислить:

$$\textbf{1)}\quad \left[[\vec{a},\ \vec{b}],\ \vec{c}\right], \qquad \textbf{2)}\quad \left[\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}]\right].$$

Ответ: **1)** $\{-7;\ 14;\ -7\}$, **2)** $\{10;\ 13;\ 19\}$.