1. Занятие 10

Смешанное произведение

№ 1. В пространстве даны два неколлинеарных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Указать геометрическое место точек $M(x, y, z)$, определяемых уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответить на тот же вопрос, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

№ 2. В пространстве даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

№ 3. Доказать, что расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости α, проходящей через три (не лежащие на обной прямой) точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, равно

$$\rho(\alpha,\ M_0) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_0},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3}\right]\right|}.$$

№ 4. Даны две непараллельные прямые в пространстве:

- ◇ прямая a, проходящая через точку $P(p_1,\ p_2,\ p_3)$ вдоль вектора $\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$,
- ◇ прямая b, проходящая через точку $Q(q_1,\ q_2,\ q_3)$ вдоль вектора $\vec{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$.

Доказать, что расстояние между этими прямыми может быть вычислено по формуле:

$$\rho(a,\ b) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{PQ},\ \vec{a},\ \vec{b}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right|}.$$