1. Занятие 11

Плоскости и гиперплоскости в четырёхмерном простанстве

Опр. 1.1. **Углом** между векторами $\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ и $\vec{b} = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4\}$ четырёхмерного простанства называется величина $\varphi(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$, косинус которой равен

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

где $(\vec{a},\ \vec{b})$ есть **скалярное произведение** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть число

$$(\vec{a},\ \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4,$$

а под **длиной** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимаются числа

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\ \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b},\ \vec{b})} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}.$$

№ 1. Выяснить, какое множество точек четырёхмерного простанства $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4$ задаётся уравнением

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + E = 0.$$

Это множество точек называется **гиперплоскостью**.

№ 2. Убедиться, что вектор

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

ортогонален к каждому из векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.
(Вектора $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k},\ \vec{l}$ – орты четырёх взаимно перпендикулярных осей координат.)

№ 3. Найти расстояние от точки $M(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$ до гиперплоскости, задаваемой уравнением

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + E = 0.$$

№ 4. В четырёхмерном пространстве даны точки $K(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$, $L(l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4)$, $M(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$ и $P(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)$. Найти расстояние от точки P до плоскости, проходящей через точки K, L и M (если известно, что точки K, L и M не лежат на одной прямой).

№ 5. Выяснить, какое множество точек четырёхмерного простанства $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4$ может являться пересечением двух гиперплоскостей. Тот же вопрос для двух плоскостей.

Ответы

№ 1. **Указание.** Рассмотреть скалярное произведение вектора $\vec{n} = \{A,\ B,\ C,\ D\}$ на вектор $\{x_1 - m_1,\ x_2 - m_2,\ x_3 - m_3,\ x_4 - m_4\}$, где $M_0(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$ – фиксированная точка, а $M(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ – бегает по гиперплоскости.

№ 2. **Указание.** Рассмотреть скалярное произведение вектора $\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]$ на каждый из векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

№ 3. **Указание.** Расстояние равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где M_0 – произвольная точка гиперплоскости, на вектор нормали $\vec{n} = \{A,\ B,\ C,\ D\}$.

№ 4. **Указание.** Найти гиперплоскость, расстояние до которой от точки P равно расстоянию до плоскости KLM. Она будет проходить через точки $K,\ L,\ M$ и, например, такую точку Q, что вектор $\overrightarrow{QK}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{KP}$. А такой вектор находится, в силу № 1, как $\left[\overrightarrow{KL},\ \overrightarrow{KM},\ \overrightarrow{KP}\right]$. Теперь задача свелась к предыдущей.

№ 5. Две гиперплоскости могут в пересечении давать:

- ◊ пустое множество (тогда они параллельны; при этом у них есть три общих базисных вектора, но нет общей точки);
- ◊ плоскость (у них есть ровно два общих базисных вектора);
- ◊ трёхмерное пространство (гиперплоскость), если они совпадают (у них есть три общих базисных вектора и общая точка).
  Почему у них не может быть ровно один общий базисный вектор?

Две плоскости α и β могут в пересечении давать:

- ◊ пустое множество (тогда они параллельны или лежат в параллельных трёхмерных пространствах);
- ◊ точку (тогда они лежат в пересекающихся по плоскости γ трёхмерных пространствах, и прямые, по которым каждая из плоскостей α и β пересекает плоскость γ, не параллельны);
- ◊ прямую (тогда они лежат в одном трёхмерном пространстве и пересекаются);
- ◊ плоскость (тогда они совпадают).