Занятие 2

№ 1. Выяснить, при каком значении параметра a и в какой точке линия семейства

а) $y = ax^2$ касается прямой $y = 2x - 1$;

б) $y = e^{ax}$ пересекается с кривой семейства $y = e^{-ax}$ под прямым углом;

в) $y = ax^2 - x$ касается кривой $y = -x^2 + ax$.

№ 2. ВВП Анчурии увеличивается каждый год на 20%. Через сколько целых лет ВВП в этой стране

а) удвоится; а) утроится; а) увеличится в n раз?

г) На сколько процентов в год должен расти ВВП, чтобы увеличиться в n раз через k лет?

№ 3. **Определение.**

Гиперболическим синусом называется функция $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
Гиперболическим косинусом называется функция $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
Гиперболическим тангенсом называется функция $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;
Гиперболическим котангенсом называется функция $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

а) Нарисовать эскизы графиков этих функций.

б) Найти их производные.

в) Заметив, что график $\operatorname{th} x$ очень похож на график $\operatorname{arctg} x$,
1. обратить внимание на отличие: при больших x график $\operatorname{th} x$ приближается к 1, а график $\operatorname{arctg} x$ – к $\frac{\pi}{2}$;
2. выяснить, какая из функций $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{arctg} x$ «быстрее» приближается к своему пределу $\left(1 \text{ или } \frac{\pi}{2}\right)$ при $x \to +\infty$.

№ 4. **Определение.**

Ареасинусом гиперболическим называется функция $y = \operatorname{arsh} x$, обратная к $\operatorname{sh} x$, то есть такая, что $x = \operatorname{sh} y$.
Ареакосинусом гиперболическим называется функция $y = \operatorname{arch} x$, обратная к $\operatorname{ch} x$, то есть такая, что $x = \operatorname{ch} y$.

а) Доказать равенства

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right); \qquad \operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right).$$

б) Нарисовать эскизы графиков этих функций.

в) Найти их производные.

Ответы

№ 1

а) При $a = 1$ в точке $x = 1$.
<u>Указание:</u> условия касания кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ в точке x_0

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \psi(x_0); \\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0). \end{cases}$$

б) При $a = 1$ в точке $x = 0$.

в) При $a = -1$ кривые совпадают. Других случаев касания нет.

№ 2.

а) Через $\left[\log_{1,2} 2\right] + 1 = \left[\frac{\ln 2}{\ln 1{,}2}\right] + 1 = 4$ года, где через $[a]$ обозначена **целая часть числа** a – наибольшее целое число, не превосходящее a.

б) Через $\left[\log_{1,2} 3\right] + 1 = \left[\frac{\ln 3}{\ln 1{,}2}\right] + 1 = 7$ лет.

в) Через $\left[\log_{1,2} n\right] + 1 = \left[\frac{\ln n}{\ln 1{,}2}\right] + 1$ лет.

г) На $(\sqrt[k]{n} - 1) \cdot 100\%$ в год.

№ 3 б)

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

№ 3 в) 2. График $\operatorname{th} x$ «быстрее», так как производная $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ гораздо быстрее стремится к нулю при $x \to \infty$, чем $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

№ 4

а) **Указание:** воспользоваться формулами $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, обозначить e^x через z и решить квадратное уравнение относительно z.

в)

$$(\operatorname{arsh} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad (\operatorname{arch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$