1. Занятие 3

№ 1. Пользуясь показательной формой записи комплексного числа

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z},$$

показать справедливость **Формул Л. Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};$$

№ 2. Показать справедливость

а) равенства $|e^{i\varphi}| = 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}$;

б) **основного тригонометрического тождества**:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

№ 3. Доказать равенства

а) $\operatorname{sh}\varphi = -i\sin i\varphi$, **б)** $\operatorname{ch}\varphi = \cos i\varphi$.

№ 4. С помощью формул Эйлера вычислить сумму:

а) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$;

б) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;

в) $\sin\varphi - \sin 2\varphi + \ldots + (-1)^{n-1}\sin n\varphi$;

г) $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi$.

№ 5. Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$?
Указание: воспользоваться показательной формой записи z и формулой Эйлера.

№ 6. Для отображения

$$w(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

найти образы линий $x = c, \quad y = c, \quad y = x.$

2. Ответы

№ 4.

а) $\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\sin\dfrac{n\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$;

б) $\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\cos\dfrac{n\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$;

в) Если $n=2k-$ чётное число, то $\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\cos\dfrac{n\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$,

Если $n=2k+1-$ нечётное число, то $-\dfrac{\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\sin\dfrac{n\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$.

№ 5. В полупрямую, идущую по отрицательной части действительной оси из точки $w=-\frac{1}{4}$ в $(-\infty)$.

№ 6. Если $w=\rho e^{i\theta}$, то

$$x=c \quad \text{перейдёт в окружность} \quad \rho=e^c;$$

$$y=c \quad \text{перейдёт в полупрямую} \quad \theta=c;$$

$$y=x \quad \text{перейдёт в спираль} \quad \rho=e^c.$$

3. Занятие 4

Формулы Л. Эйлера
имеют место и для всех комплескных чисел (не только для $\varphi \in \mathbb{R}$):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

№ 1. Найти все такие z, что выпонено равенство $w = e^z$. Функция, ставящая каждому w все такие z, обозначается $z = \operatorname{Ln} w$.

Возведение комплексного числа в комплексную степень осуществляется по закону:

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}.$$

№ 2. Доказать, что функция z^{a+ib}, где a, $b \in \mathbb{R}$, является

а) однозначной только при $a \in \mathbb{Z}$, $b = 0$;

б) конечнозначной только при $a \in \mathbb{Q}$, $b = 0$.

№ 3. Найти:

а) i^i, **б)** 2^i, **в)** $1^{\sqrt{2}}$, **г)** $(1+i)^{1-i}$, **д)** $\sqrt[3]{8}$.

№ 4. Найти:

а) $\cos(2+i)$, **б)** $\sin(2007 + 2008i)$.

№ 5. Найти все z, такие что:

а) $\sin z = i$, **б)** $\cos z = 2$;

в) $\sin z = w$, **г)** $\cos z = w$.

4. Ответы

№ 1. $\operatorname{Ln} w = \ln|w| + i \arg w + 2\pi k i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$

№ 3.

а) $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{Z};$

б) $2^i = e^{2\pi n}\left(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2\right), \qquad n \in \mathbb{Z};$

в) $1^{\sqrt{2}} = \cos\left(2\pi k\sqrt{2}\right) + i\sin\left(2\pi k\sqrt{2}\right);$

г) $(1+i)^{1-i} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)\right);$

д) $$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2, & k = 0,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \ldots; \\ -1 + i\sqrt{3}, & k = 1,\ 1 \pm 3, \ldots; \\ -1 - i\sqrt{3}, & k = 2,\ 2 \pm 3, \ldots. \end{cases}$$

№ 4.

а) $\cos(2+i) = \operatorname{ch} 1 \cos 2 - i \operatorname{sh} 1 \sin 2;$

б) $\sin(2007 + 2008i) = \sin 2007 \operatorname{ch} 2008 + i \cos 2007 \operatorname{sh} 2008.$

№ 5.

а) $2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right), \qquad \pi(2k+1) - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right);$

б) $z = \operatorname{Arccos} 2 = 2\pi k \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right);$

в) $z = \operatorname{Arcsin} w = -i\operatorname{Ln}\left[i\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)\right];$

г) $z = \operatorname{Arccos} w = -i\operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right).$