1. Занятие 5-7

Операции с векторами

№ 1. В параллелограмме $ABCD$ даны три вершины $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$. Определить координаты четвертой вершины D.

№ 2. Пусть $A_1 A_2 \ldots A_n$ – правильный $n-$угольник с центром в точке O. Доказать, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

№ 3. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ — неколлинеарные векторы на плоскости. Нарисовать множество всех векторов вида $\vec{c} = \alpha\,\vec{a}\vec{a} + \beta\,\vec{b}$, где $\alpha + \beta = 1$.

№ 4. В пространстве даны два произвольных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 суть точки пересечения диагоналей. Доказать, что

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}\right).$$

Скалярное произведение

№ 5. Дан вектор $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$. Найти координаты вектора $\vec{h}$, перпендикулярного к $\vec{a}$ и имеющего длину **а)** $|\vec{a}|$; **б)** 1.

№ 6. Пусть $\vec{a} = (a_1,\ a_2), \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ – неколлинеарные векторы на плоскости (координаты декартовы). Доказать, что площадь параллелограмма, образованного этими векторами, вычисляется по формуле $S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

№ 7. Какому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M(x,\ y)$, если она лежит на прямой a, проходящей через точку $M_0(x_0,\ \ y_0)$, и параллельной вектору $\vec{a} = \{a_1,\ a_2\}$? (Координаты декартовы.)

№ 8. Какому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M(x,\ y,\ z)$, если она лежит на прямой a, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, и параллельной вектору $\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$? (Координаты декартовы.)

№ 9. Какому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M(x,\ y)$, если она лежит на прямой a, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$, и перепендикулярной вектору $\vec{n} = \{n_1,\ n_2\}$? (Координаты декартовы.)

№ 10. Какому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M(x,\ y,\ z)$, если она лежит на плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, и перепендикулярной вектору $\vec{n} = \{n_1,\ n_2,\ n_3\}$? (Координаты декартовы.)

2. Ответы

№ 1. $D(d_1, d_2, d_3)$ имеет координаты $d_k = c_k + a_k - b_k$, где $k = 1;\ 2,\ 3.$

№ 2. Указание.
Первый способ: отложить вектор, равный вектору $\overrightarrow{OA_2}$ от конца вектора $\overrightarrow{OA_1}$, затем вектор, равный вектору $\overrightarrow{OA_3}$ от конца полученой ломаной, и так далее. Убедиться, что получится правильный $n-$угольник.
Второй способ: повернуть плоскость вокруг точки O на угол $\frac{2\pi}{n}$ и убедиться, что сумма $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$ не изменится.

№ 3. Указание. Представить вектор $\vec{c}$ в виде $\vec{c} = \alpha\left(\vec{a}\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{b}.$

№ 5. а) $\vec{h} = \pm\{a_2,\ -a_1\};$ б) $\vec{h} = \pm\left\{\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ \frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right\}.$

№ 6. Указание. Найти высоту параллелограмма, как длину проекции вектора $\vec{b}$ на вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}.$

№ 7. $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}$, или, иначе, $a_2(x-x_0) - a_1(y-y_0) = 0.$

№ 8. $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}.$

№ 9. $\frac{x-x_0}{n_2} = \frac{y-y_0}{-n_1}$, или, иначе, $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) = 0.$

№ 10. $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0.$