1. Занятие 8

Определители

1217. Не вычисляя определитель, доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

Правило вычисления определителя порядка n путём разложения по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1}\, a_{nn} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2(n-2)} & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3(n-2)} & a_{3n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{n(n-2)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

№ 1227^M. Используя свойства определителя и правило вычисления путём разложения по строке (столбцу), доказать равенства:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$

в) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,k=1 \\ i>k}}^{n} (x_i - x_k).$$

I. Матрица, у которой над (или под) главной диагональю все элементы равны нулю, называется **треугольной**. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}.$$

2. Ответы

№ 1217.

Указание. Представить третий столбец второго определителя в виде

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

найти коэффициенты a, b, c и воспользоваться свойством определителя.

Ответ: $a = 2, \quad b = 0, \quad c = 1.$

№ 1227^M.

Опр. 2.1. **Определителем Вандермонда** называется определитель:

$$W(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

а) **Указание.** Вычесть из третьей строки вторую, умноженную на x, затем из второй – первую, умноженную на x. Разложить по первому столбцу, при вычислении полученного определителя второго порядка вынести общий множитель первого столбца и второго столбца.

б) **Указание.** Вычесть из четвёртой строки третью, умноженную на x, затем из третьей строки вторую, умноженную на x, затем из второй – первую, умноженную на x. Разложить по первому столбцу, при вычислении полученного определителя третьего порядка вынести общий множитель каждого столбца.

в) **Указание.** Вычесть из последней строки предпоследнюю, умноженную на x, затем из предпоследней – третью снизу, умноженную на x, и так далее. Разложить по первому столбцу, при вычислении полученного определителя $(n-1)$-го порядка вынести общий множитель каждого столбца.
Далее воспользоваться **методом математической индукции**:

Утверждение «Все элементы x_n множества $X = \{x_1,\ x_2,\ \dots\}$ обладают свойством A» считается доказанным, если доказаны два факта:

1) элемент x_1 обладает свойством A;
2) из того что элементы $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k$ обладают свойством A следует, что элемент x_{k+1} также обладает свойством A.

I. **Указание.** Воспользоваться методом математической индукции.

3. Занятие 9

Векторное произведение

№ 1. (№ 847) Даны произвольные векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$. Доказать, что векторы $\vec{a} = [\vec{p},\ \vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q},\ \vec{n}]$ и $\vec{c} = [\vec{r},\ \vec{n}]$ компланарны.

№ 2. (№ 846) Доказать, что $[\vec{a},\ \vec{b}]^2 \leqslant \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}$. В каком случае здесь будет знак равенства?

№ 3. Доказать, что расстояние от точки $S(s_1,\ s_2,\ s_3)$ до прямой a

$$a: \qquad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, можно найти по формуле $\quad \rho(a,\ S) = \frac{\left|[\vec{a},\ \overrightarrow{M_0S}]\right|}{|\vec{a}\,|}$.

№ 4. (№ 849) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ связаны соотношениями $[\vec{a},\ \vec{b}] = [\vec{c},\ \vec{d}]$ и $[\vec{a},\ \vec{c}] = [\vec{b},\ \vec{d}]$. Доказать, что векторы $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ коллинеарны.

№ 5. Доказать, что

$$\Big[[\vec{a},\ \vec{b}],\ \vec{c}\Big] = \vec{b}\,(\vec{a},\ \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a},\ \vec{b}).$$

Указание: ввести декартову прямоугольную систему координат так, чтобы $\vec{i} \upuparrows \vec{a}$ и $\vec{k} \perp \vec{a}, \quad \vec{k} \perp \vec{b}$.

№ 6. (№ 882) Считая, что каждый из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отличен от нулевого, установить, при каком их взаимном расположении справедливо равенство $\Big[\vec{a},\ [\vec{b},\ \vec{c}]\Big] = \Big[[\vec{a},\ \vec{b}],\ \vec{c}\Big]$.

№ 7. Площадь параллелограмма равна $4\sqrt{3}$, большая диагональ имеет длину 5, а острый угол равен $\frac{\pi}{3}$. Найти меньшую диагональ.

№ 8. Отрезок DE делит треугольник ABC на две равные по площади фигуры. Зная, что DE параллелен основанию BC, длина которого известна и равна a, найти длину DE.

4. Ответы

№ 2. В случае, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

№ 6. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, либо $\vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{b} \perp \vec{c}$.

№ 7. 3.

№ 8. $|DE| = \frac{a}{\sqrt{2}}$.