1. Цилиндрические функции

1.1. Определение и взаимосвязь цилиндрических функций

Уравнение Бесселя

$$t^2\mathbf{Z}''(t)+t\mathbf{Z}'(t)+\left(t^2-\nu^2\right)\mathbf{Z}(t)=0. \tag{1.1}$$

Всякое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

Теорема 1.1.

Утв. *Общее решение уравнения Бесселя (1.1) задаётся каждой из формул*

$$\mathbf{Z}_\nu(t)=c_1J_\nu(t)+c_2N_\nu(t)=c_3H_\nu^{(1)}(t)+c_4H_\nu^{(2)}(t), \qquad \nu\in\mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(t)=c_5J_\nu(t)+c_6J_{-\nu}(t) \qquad \nu\notin\mathbb{Z}.$$

1.2. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\left[t^\nu\mathbf{Z}_\nu\right]'(t)=t^\nu\mathbf{Z}_{\nu-1}(t), \qquad \left[t^{-\nu}\mathbf{Z}_\nu\right]'(t)=-t^{-\nu}\mathbf{Z}_{\nu+1}(t). \tag{1.2}$$

$$\mathbf{Z}_{\nu+1}(t)\;-\;\frac{2\nu}{t}\mathbf{Z}_\nu(t)+\mathbf{Z}_{\nu-1}(t)=0. \tag{1.3}$$

Для функций Бесселя и Неймана с целочисленным порядком $\nu=n\in\mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathbf{Z}_{-n}(t)=(-1)^n\mathbf{Z}_n(t), \qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

1.3. Интегральные формулы для функций Бесселя

Интегралы Ломмеля:

$$\int\limits_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)dt=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\Big(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x)J_\nu(\beta x)-\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\Big), \qquad \alpha\neq\beta, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_0^x t\left(J_\nu(\alpha t)\right)^2dt=\frac{x^2}{2}\left(\alpha J_\nu'(\alpha x)\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\left(J_\nu(\alpha x)\right)^2, \qquad \nu>-1. \tag{1.6}$$

Имеют место и более общие формулы:

$$\int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu_kr)\mathbf{Z}(\mu_mr)dr=\frac{r\left(\mu_k\mathbf{Z}(\mu_mr)\mathbf{Z}'(\mu_kr)-\mu_m\mathbf{Z}(\mu_kr)\mathbf{Z}'(\mu_mr)\right)\Big|_a^b}{\mu_m^2-\mu_k^2}; \tag{1.7}$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2=\int\limits_a^b r\mathbf{Z}^2(\mu r)dr=\frac{1}{2}\left[\left(r^2-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b}+r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b}\right]. \tag{1.8}$$

где $\mathbf{Z}(t)$ – произвольные решения уравнения Бесселя

$$(t\mathbf{Z}')'+\left(t-\frac{\nu^2}{t}\right)\mathbf{Z}=0, \qquad t\in(a,\,b),$$

а μ_k в формуле (1.7) – положительные решения уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu a) & \alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu b) & \alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu b) \end{vmatrix} = 0. \tag{1.9}$$

1.4. Поведение функций Бесселя и Неймана

Теорема 1.2 (Поведение в окрестности нуля).

Утв.

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & \nu < 0, \ \ \nu \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \nu < 0, \ \ \nu \in \mathbb{Z}; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0; \end{cases} \qquad N_\nu(+0) = \infty, \qquad \nu \in \mathbb{R};.$$

1.5. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0,\ R]$

Опр. 1.1. Через M мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(r) \in C^2(0,\ R]; \qquad \frac{L_\nu(u)}{\sqrt{r}} \in L_2(0,\ R).$$

Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0,\ R]$ мы будем называть задачу:
Найти числа λ и функции $0 \not\equiv u(r) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda r u, & r \in (0,\ R), \quad \nu \geqslant 0; \\ \big|u(+0)\big| < \infty; \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, & \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

При этом функции $u \not\equiv 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа λ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

Теорема 1.3.

Утв.1. *Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1.*

Утв.2. *Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(r) \equiv const$.*

Теорема 1.4.

Утв. *Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R\, J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Теорема 1.5.

Утв. 1. *Функция* $\sqrt{r}\,\varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\,R)$

$$\sqrt{r}\,\varphi(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{\nu}\sqrt{r}\,J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{\nu}r}{R}\right), \tag{1.11}$$

$$\alpha_k^{\nu}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_{\nu}'\left(\mu_k^{\nu}\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu^2}{\left[\mu_k^{\nu}\right]^2}\right)J_{\nu}^2\left(\mu_k^{\nu}\right)}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{\nu}r}{R}\right)dr,$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ *– положительные корни уравнения*

$$\alpha R\,J_{\nu}(\mu)+\beta\mu J_{\nu}'(\mu)=0.$$

Утв. 2. *В случае* $\alpha=\nu=0$, *функция* $\sqrt{r}\,\varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\,R)$

$$\sqrt{r}\,\varphi(r)=\alpha_0^0\sqrt{r}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^0\sqrt{r}\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{1.12}$$

$$\alpha_0^0=\frac{2}{R^2}\int\limits_0^R r\varphi(r)dr,\qquad\qquad \alpha_k^0=\frac{2}{\underbrace{\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}_{=0}+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

где μ_k *– положительные корни уравнения* $J_1(\mu)=0$.

Заметим, что в формуле (1.11) можно (и нужно) сократить на $\sqrt{r}$. Зачем же его писать? Это делается для того, чтобы разлагаемая функция, даже если она будет неограничена в окрестности нуля, попал в нужный класс, то есть в класс функций, для которых справедлива теорема Стеклова, и ряд (1.11) сходился равномерно даже в окрестности нуля.

2. Сферические функции

2.1. Полиномы Лежандра

Опр. 2.1. Уравнение Лежандра:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy(t)}{dt}\right]+\lambda y(t)=0,\qquad t\in(-1,\,1). \tag{2.1}$$

Заметим, что точки $t=\pm1$ являются **особыми** для данного уравнения, – старший коэффициент уравнения в этих точках обращается в ноль.
Большинство решений (2.1) в $t=\pm1$ уходит в бесконечность. Однако физический интерес представляют решения, ограниченные на всём отрезке $t\in[-1,\;1]$. Таким образом, возникает

спектральная задача:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy(t)}{dt}\right] + \lambda y(t) = 0, \qquad t \in (-1,\,1); \\ \left|y(\pm 1)\right| < \infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

Свойства спектральной задачи (2.2) описывает теорема:

Теорема 2.1.

Усл. *Ограниченная функция $y(t) \not\equiv 0$ есть решение уравнения* (2.1).

Утв. *1)* $\lambda = n(n+1)$, *где* $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$;

2) функция $y(t)$ является полиномом степени n, называемым **полиномом Лежандра**, *и может быть найдена по* **формуле Родрига:**

$$y(t) = P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\left[\left(t^2-1\right)^n\right]. \tag{2.3}$$

Теорема 2.2 (Рекуррентные формулы)**.**

Утв. *Имеют место следующие соотношения:*

основные:

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)\,t\,P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0, \qquad n \geqslant 1; \tag{2.4}$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)\right), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.5}$$

дополнительные:

$$P'_{n-1}(t) = t\,P'_n(t) - nP_n(t), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.6}$$

$$P'_n(t) = t\,P'_{n-1}(t) + nP'_{n-1}(t), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.7}$$

$$(1-t^2)P'_n(t) = nP_{n-1}(t) - n\,t\,P_n(t), \qquad n \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Кроме приведённых формул, также весьма полезны следующие соотношения:

$$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t), \qquad P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n, \qquad n \geqslant 1; \tag{2.9}$$

$$P_{2m+1}(0) = 0, \qquad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Выпишем первые несколько полиномов Лежандра:

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{3t^2-1}{2}, \qquad P_3(t) = \frac{5t^3-3t}{2}; \tag{2.11}$$

$$P_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}, \qquad P_5(t) = \frac{63t^5 - 70t^3 + 15t}{8}; \tag{2.12}$$

$$P_6(t) = \frac{231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5}{16}, \ldots \tag{2.13}$$

Приведём также первые несколько выражений стандартных полиномов вида t^k через полиномы Лежандра:

$$1 = P_0(t), \qquad t = P_1(t), \qquad t^2 = \frac{1}{3}\Big(P_0(t) + 2P_2(t)\Big), \qquad t^3 = \frac{1}{5}\Big(3P_1(t) + 2P_3(t)\Big); \tag{2.14}$$

$$t^4 = \frac{1}{35}\Big(7P_0(t) + 20P_2(t) + 8P_4(t)\Big), \qquad t^5 = \frac{1}{63}\Big(27P_1(t) + 28P_3(t) + 8P_5(t)\Big). \tag{2.15}$$

Теорема 2.3 (Разложение в ряд по полиномам Лежандра).

Усл. $f(t) \in C^2[-1,\, 1]$.

Утв. *$f(t)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(t), \qquad f_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(t) P_k(t) dt, \qquad t \in [-1,\, 1]. \tag{2.16}$$

*При этом ряд (2.16) сходится к $f(t)$ **равномерно** на всём сегменте $[-1,\, 1]$.*

Теорема 2.4 (Разложение в ряд по полиномам Лежандра от косинусов).

Усл. $F(\theta) \in C^2[0,\, \pi]$.

Утв. *$F(\theta)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k P_k(cos\theta), \qquad F_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} F(\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \qquad \theta \in [0,\, \pi]. \tag{2.17}$$

*При этом ряд (2.17) сходится к $F(\theta)$ **равномерно** на всём сегменте $[0,\, \pi]$.*

2.1.1. Общий вид гармонической функции, не зависящей от φ

В случае, когда гармоническая функция $u(r,\, \theta,\, \varphi)$ не зависит от угла φ, имеют место следующие представления этой функции:

- в шаре радиуса R, то есть при $r < R$:

$$u(r,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{2.18}$$

- вне шара радиуса R, то есть при $r > R$:

$$u(r,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \tag{2.19}$$

- в шаровом слое, то есть при $R_1 < r < R_2$:

$$u(r,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta)\, r^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \tag{2.20}$$

Опр. 2.2. Функции $P_n(\cos\theta)$ называются **сферическими**, более точно **зональными сферическими** функциями порядка n.
Функции $P_n(\cos\theta)\, r^n$ называются **шаровыми** функциями порядка n. В декартовых координатах шаровые функции представляют собой однородные гармонические полиномы от (x, y, z) степени n:

$$u_n(x,\, y,\, z) = \sum_{p+q+s=n} a_{p,q,s}\, x^p y^q z^s, \qquad \Delta u_n = 0.$$

Функции $\dfrac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$ мы будем называть **внешними шаровыми** или **внешаровыми** функциями порядка n.

2.1.2. Производящая функция

Многие свойства полиномов Лежандра удобно доказывать, ипользуя следующее разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) r^n, \qquad |r|<1, \quad \forall t \in [-1,\, 1]. \tag{2.21}$$

В данном случае $P_n(t)$ – коэффициенты ряда, а функция левой части имеет своё название:

Опр. 2.3. Функция $\dfrac{1}{\sqrt{1-2rt+t^2}}$ называется **производящей функцией** для полиномов Лежандра.

2.2. Присоединённые функции Лежандра

Здесь мы будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy(t)}{dt}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right) y(t) = 0, \qquad t \in (-1,\, 1). \tag{2.22}$$

Теорема 2.5.

Усл. *Ограниченная функция* $y(t) \not\equiv 0$ *есть решение уравнения* (2.22).

Утв. *1)* $\lambda = n(n+1)$, *где* $n = \overline{0,\, \infty}$;

2) функция $y(t)$, *называемая* **присоединённой функцией Лежандра порядка** k, *может быть найдена по формуле:*

$$y(t) = P_n^m(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \qquad m = \overline{0,\, n}; \tag{2.23}$$

3) при этом $P_n^{(0)}(t) \equiv P_n(t)$ *– полиномы Лежандра, а* $P_n^m(t) \equiv 0$ *при всех* $m > n$.

Опр. 2.4. Функции

$$P_n^m(\cos\theta)\cos k\varphi, \qquad P_n^m(\cos\theta)\sin k\varphi, \qquad m = \overline{0,\, n}, \quad n = \overline{0,\, \infty}, \tag{2.24}$$

называются **сферическими гармониками**.

Теорема 2.6 (Разложение в ряд по сферическим гармоникам).

Усл. $g(\theta,\,\varphi) \in C^2,\ \ \theta \in [0,\,\pi],\ \varphi \in [0,\,2\pi],\ \ g(\theta,\,\varphi + 2\pi) = g(\theta,\,\varphi).$

Утв. $g(\theta,\,\varphi)$ *разлагается в следующий ряд Фурье*

$$g(\theta,\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha_{k0}}{2}P_k(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{k} P_k^m(\cos\theta)\left(\alpha_{km}\cos(m\varphi) + \beta_{km}\sin(m\varphi)\right)\right], \tag{2.25}$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,\cos(m\varphi)\int\limits_0^{\pi} g(\theta,\,\varphi)\,P_k^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{2.26}$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,\sin(m\varphi)\int\limits_0^{\pi} g(\theta,\,\varphi)\,P_k^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{2.27}$$

При этом ряд (2.25) *сходится к* $g(\theta,\,\varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на* $\theta \in [0,\,\pi],\ \varphi \in [0,\,2\pi]$.

3. Приложение. Оператор Лапласа в криволинейных координатах

Приведём для полноты картины вид оператора Лапласа в наиболее часто встречающихся типах криволинейных координат – в цилиндрических и сферических.

3.1. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах

В цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

оператор Лапласа принимает вид:

$$\Delta u(r,\,\varphi,\,z) = \frac{1}{r}\Big(ru_r\Big)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}.$$

3.2. Оператор Лапласа в сферических координатах

В сферических координатах

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

оператор Лапласа принимает вид:

$$\Delta u(r,\,\theta,\,\varphi) = \frac{1}{r^2}\Big(r^2u_r\Big)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi},$$