1. Упражнения

Пример 1.1. *Построить отрицание:*

а) все студенты – двоечники;

б) все суждения ложны;

в) в каждой шутке есть доля правды;

г) $A \Rightarrow B$;

д) некоторые студенты – двоечники;

е) некоторые суждения ложны;

ж) в некоторых шутках есть доля правды;

з) $\mathfrak{I}\, A \Rightarrow B$.

Пример 1.2. *Построить отрицание сложных терминов:*

а) маленький и зелёный;

б) замкнутая и ограниченная[1];

в) A **и** B;

г) $\begin{cases} x < a, \\ x \geqslant b; \end{cases}$

д) $|x - a| < b$;

е) линейное или квадратное;

ж) положительное или отрицательное;

з) A **или** B;

и) $\left[\begin{array}{l} x < a, \\ x \geqslant b. \end{array} \right.$

к) $|x - a| \geqslant b$.

Пример 1.3. *Построить отрицание:*

а) D – замкнутая и ограниченная область;

б) $\big(A$ **и** $B\big) \Rightarrow \big(C$ **или** $D\big)$;

в) линейное или квадратное уравнение;

г) $\big(A$ **или** $B\big) \Rightarrow \big(C$ **и** $D\big)$.

Пример 1.4. *Построить отрицание:*

а) A и B сидели на трубе.

б) Умный и красивый, значит либо женатый, либо злой.

в) Женщина может всё, а мужчина – всё остальное.

г) $(x - a)(x - b) > 0$.

д) Все студенты – двоечники.

е) Некоторые студенты – двоечники.

ж) Все суждения ложны.

з) Некоторые суждения ложны.

и) В каждой шутке есть доля правды.

[1] Замкнутая и ограниченная область называется компактной областью, или просто компактом.

к) В некоторых шутках есть доля правды.

л) Всякая селёдка – рыба.

Пример 1.5. *Доказать по индукции:*[1]

№ 1.
$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

№ 2.
$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

№ 3.
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\big(1+2+\ldots+n\big)^2.$$

№ 4.
$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1.$$

№ 5. Пусть $a^{[n]}=a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ и $a^{[0]}=1$.

Доказать, что $(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m\,a^{[n-m]}b^{[m]}$, где $C_n^m=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по m.

Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона.*

№ 6. Доказать *неравенство Бернулли:*

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots x_n,$$

где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – числа одного и того же знака, бóльшие -1.

№ 7. Доказать, что если $x>-1$, то справедливо неравенство:

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\qquad n>1,$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

№ 8. Доказать неравенство:

$$n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\qquad n\geqslant 2.$$

Пример 1.6. *Найти ошибку в рассуждениях:*

Утв. *Все числа множества* $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ *равны нулю.*

Доказательство. **1) База индукции.** При $n=0$ равенство $n=0$ верно.
2) Шаг индукции. Пусть при $n=k$ справедливы равенства $0=1=\ldots=k=0$.
Тогда при $n=k+1$ получаем:

$$k+1=\underbrace{k}_{=0}+\underbrace{1}_{=0}=0+0=0.$$

Таким образом, в силу метода математическиой индукции, все неотрицательные целые числа равны нулю. □

[1] Нумерация примеров ведётся по задачнику Демидовича.