Пример 3.1. *Прочитать определения и осознать их смысл:*

1) Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a,\ b]$, называется **ограниченной на** $[a,\ b]$, если
$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, x \in [a,\ b] \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < M.$$

2) Множество D точек числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$ называется **ограниченным сверху**, если
$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x < M.$$

3) Множество D точек числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$ называется **ограниченным снизу**, если
$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \forall\ x \in D \quad \Longrightarrow \quad x > M.$$

4) Множество D точек числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$ называется **ограниченным**, если
$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad |x| < M.$$

5) Число s называется **точной нижней гранью числового множества** $D \subset \mathbb{R}$ и обозначается $s = \inf D$, если

I) $\quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant s;$

II) $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in D: \quad a < s + \varepsilon.$

6) Число S называется **точной верхней гранью числового множества** $D \subset \mathbb{R}$ и обозначается $S = \sup D$, если

I) $\quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant S;$

II) $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b \in D: \quad b > S - \varepsilon.$

7) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно возрастающей**, если
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n < a_{n+1}.$$

8) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно убывающей**, если
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n > a_{n+1}.$$

9) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно неубывающей**, если
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n \leqslant a_{n+1}.$$

10) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно невозрастающей**, если
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n \geqslant a_{n+1}.$$

Пример 3.2. *Прочитать высказывания и осознать их смысл:*

а) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad a_n > 0.$

б) $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad a_n > 0.$

в) $\exists\, M > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < M.$

Пример 3.3. *Записать высказывания на языке кванторов:*

а) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху.

б) Функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,\ b]$.

в) Функция $f(x)$ невозрастает[1] на отрезке $[a,\ b]$.

[1] Напоминаем, что «невозрастает» означает «является невозрастающей», в то время как «не возрастает» означает «не является возрастающей», – и это **р а з н ы е** понятия!

Пример 3.4. *Написать отрицание:*

а) $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} > a_n$ (последовательность возрастает).

б) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k > n : \qquad a_k = 0$ (у последовательности есть нулевые элементы со сколь угодно большими номерами).

в) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad \forall\, k > n \quad \Longrightarrow \quad |a_k| < \varepsilon$ (последовательность стремится к нулю).

г) $\exists\, M > 0 : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| < M$ (последовательность ограничена).

Пример 3.5. *Построить отрицание:*

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \exists\, b \in \mathbb{Q} : \qquad \left[\begin{array}{l} \forall\, x > b \quad \Longrightarrow \quad f(x) > a; \\[2ex] \exists\, n \in \mathbb{N} : \qquad \left\{\begin{array}{l} f(b^n) \leqslant a; \\ b \cdot n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Не вникая в смысл данного высказывания, а пользуясь только правилом построения отрицаний, получаем:

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \qquad \forall\, b \in \mathbb{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} \exists\, x > b : \qquad f(x) \leqslant a; \\[2ex] \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(b^n) > a; \\ b \cdot n \notin \mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 3.6. *Построить отрицание ко всем пунктам примера 3.1, стр. 1 и вникнуть в смысл.*

Пример 3.7. *Построить отрицание к суждениям и осознать разницу между понятиями* $\inf$ *и* $\min$*:*

1) $s = \inf D$:

I) $\qquad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant s;$

II) $\qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in D : \quad a < s + \varepsilon.$

2) $m = \min\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$:

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall\, x \in [a,\ b], & \Longrightarrow & f(x) \geqslant m; \\[2ex] \exists x_0 \in [a,\ b] : & & f(x_0) = m. \end{array}\right.$$