ПАМЯТКА для студентов К–6
(основные формулы к КР–1 по УМФ)

Одномерное уравнение теплопроводности

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_t = a^2\, u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases}$$

с неизвестной функцией $u = u(x,t)$.

Формула Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2\, t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2\, t}}\, \varphi(s)\, ds$$

при $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, определяет решение задачи Коши для любой кусочно непрерывной, ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(x)$.

Функция ошибок:

$$\Phi(z) \equiv \operatorname{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2}\, d\tau, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Элементарные свойства:

а) $\Phi(0) = 0$,

б) $\Phi(+\infty) = 1$,

в) $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ (нечетность).

Таблица значений функции ошибок

z	$\Phi(z)$
0.1	0.1125
0.2	0.2227
0.3	0.3286
0.4	0.4284
0.5	0.5205
0.6	0.6039
0.7	0.6778
0.8	0.7421
0.9	0.7969
1.0	0.8427
1.1	0.8802
1.2	0.9103
1.3	0.9340
1.4	0.9523
1.5	0.9661

z	$\Phi(z)$
1.6	0.9764
1.7	0.9838
1.8	0.9891
1.9	0.9928
2.0	0.9953
2.1	0.9970
2.2	0.9981
2.3	0.9989
2.4	0.9993
2.5	0.9996
2.6	0.9998
2.7	0.9999
2.8	0.9999
2.9	0.9999
3.0	0.9999

Оператор Лапласа

В декартовых координатах в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \qquad u = u(x_1, \ldots, x_n).$$

Сферически симметричный случай в $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr}\left(r^{n-1} \frac{du(r)}{dr}\right), \qquad u = u(r), \qquad r = |x|.$$

В частности, сферически симметричный случай в $\mathbb{R}^3$:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du(r)}{dr}\right),$$

замена $u(r) = \dfrac{v(r)}{r}$, тогда $\Delta u = \dfrac{v_{rr}}{r}$ (только в $\mathbb{R}^3$).

Объемный потенциал

Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$:

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{\omega_n\,(n-2)\,|x|^{n-2}}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Объемный потенциал:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)\, \rho(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Свойства объемного потенциала:

а) $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ (гладкость),

б) если $n \geqslant 3$, то $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$,

в) $\Delta u(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ (свойство Лапласа),

г) $\Delta u(x) = \rho(x)$, $x \in \Omega$ (свойство Пуассона).

Свойство Пуассона выполняется там, где плотность $\rho(x)$ принадлежит классу C^1.

В случае сферически симметричной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и сферически симметрической плотности $\rho = \rho(r)$ объемный потенциал также сферически симметричен:

$$u = u(r), \qquad r = |x|.$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ наряду с фундаментальным решением $E(x)$ и объемным потенциалом $u(x)$ рассматривают также ньютоновы потенциалы

$$E_N(x) = \frac{1}{|x|}, \qquad u_N(x) = \int\limits_{\Omega} E_N(x-y)\, \rho(y)\, dy.$$

Формулы перехода:

$$E_N(x) = -4\pi\, E(x), \quad u_N(x) = -4\pi\, u(x) \quad (\text{только в } \mathbb{R}^3).$$