ПАМЯТКА для студентов К–6
(основные формулы к КР–2 по УМФ)

Оператор Лапласа

а) сферически-симметричный случай в $\mathbb{R}^n$

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\,\frac{du(r)}{dr}\right);$$

в частности, сферически-симметричный случай в $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{du(r)}{dr}\right),$$

замена $u(r) = \dfrac{v(r)}{r}$, тогда $\Delta u = \dfrac{v_{rr}}{r}$ (только в $\mathbb{R}^3$);

б) в полярных координатах на плоскости

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

б) в цилиндрических координатах в пространстве

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в) в сферических координатах в пространстве

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Цилиндрические функции

Уравнение Бесселя индекса $\nu \in \mathbb{R}$:

$$x^2\,w''(x) + x\,w'(x) + (x^2 - \nu^2)w(x) = 0.$$

Решение:

$$w(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x).$$

При $\nu \geqslant 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0+} |J_\nu(x)| < \infty, \qquad \lim_{x\to 0+} |N_\nu(x)| = \infty.$$

Запись функции Бесселя:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Запись функции Неймана:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \qquad \nu \notin \mathbb{Z},$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}(J_\nu(x)) - (-1)^n\frac{\partial}{\partial \nu}(J_{-\nu}(x))\right)\Bigg|_{\nu=n}.$$

Уравнение Бесселя со спектральным параметром μ:

$$r^2\,W''(r) + r\,W'(r) + (\mu^2 r^2 - \nu^2)W(r) = 0.$$

При $\mu \neq 0$ решение имеет вид:

$$W(r) = C_1 J_\nu(\mu r) + C_2 N_\nu(\mu r).$$

Рекуррентные соотношения:

а) $\dfrac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$

б) $\dfrac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$

в) $J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \dfrac{\nu}{x}\,J_\nu(x),$

г) $J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \dfrac{\nu}{x}\,J_\nu(x),$

д) $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$

е) $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x}\,J_\nu(x).$

Обычно на практике

$$\nu = n \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{0,\,1,\,2,\,\dots\},$$

причем

$$J_{-n}(x) = (-1)^n\,J_n(x).$$

Типичная спектральная задача:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\,\dfrac{dW(r)}{dr}\right) + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{r^2}\right)W(r) = 0, \quad 0 < r < R, \\ |W(0)| < \infty, \qquad W(R) = 0. \end{cases}$$

Спектр:

$$\lambda_k = \left(\frac{\gamma_k}{R}\right)^2, \quad W_k(r) = J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\gamma_k \in M_n \equiv \{\gamma > 0:\ J_n(\gamma) = 0\}.$$

Свойство ортогональности и нормы:

$$\int_0^R r J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right) J_n\left(\frac{\gamma_j}{R}\,r\right) dr = 0, \qquad \gamma_k \neq \gamma_j,$$

$$\left\| J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right)\right\|^2 \equiv \int_0^R r J_n^2\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right)\,dr = \frac{R^2}{2}(J_{n+1}(\gamma_k))^2.$$

Ряд Фурье–Бесселя на $(0,R)$:

$$f(r) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right),$$

$$A_k = \frac{2}{R^2(J_{n+1}(\gamma_k))^2}\int_0^R r f(r) J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right)\,dr.$$

Здесь γ_k, γ_j – положительные корни функции $J_n(x)$.

Полиномы Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2-1)^n\right], \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\ .$$

Явная запись нескольких первых полиномов:

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}\,(3t^2-1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}\,(5t^3-3t), \qquad P_4(t) = \frac{1}{8}\,(35t^4-30t^2+3).$$

Обратные выражения:

$$1 = P_0(t), \qquad t = P_1(t), \qquad t^2 = \frac{1}{3}(P_0(t)+2P_2(t)),$$

$$t^3 = \frac{1}{5}(3P_1(t)+2P_3(t)), \qquad t^4 = \frac{1}{35}(7P_0(t)+20P_2(t)+8P_4(t)).$$

Спектральная задача для уравнения Лежандра:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left((1-t^2)\dfrac{dw(t)}{dt}\right) + \lambda w(t) = 0, \qquad |t| < 1, \\ |w(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

Спектр: $\lambda_n = n(n+1)$, $w_n(t) = P_n(t)$, $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$.

Свойство ортогональности:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(t)P_k(t)\; dt = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = k. \end{cases}$$

Рекуррентные соотношения:

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)\,t\,P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)\right)$$

для $n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$.

Общий вид гармонической функции в шаре:

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^k, \qquad r < R,$$

и вне шара:

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}, \qquad r > R,$$

в случае зависимости от радиуса r и сферического угла θ.