1 Метод Фурье для эллиптического уравнения.

№ 717 а). **Случай однородных краевых условий по x.**

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0,\ l), \quad y \in (0,\ s), \\ u(0,y) = u_x(l,y) = 0, & y \in (0,\ s), \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,s) = f(x), & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{1.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{xx} + u_{yy} = 0$ с краевыми условиями $u(0,y) = u_x(l,y) = 0$ в виде $U(x,y) = X(x)Y(y)$.

Сразу заметим, что краевые условия при $x = 0$, $x = l$ означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{1.2}$$

Подставим $U(x,y)$ в уравнение, получим:

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

Предположив, что $X(x)Y(y) \neq 0$, поделим это равенство на $X(x)Y(y) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.3}$$

$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{1.4}$$

а для функции $Y(y)$ – уравнение:

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \qquad y \in (0,s). \tag{1.5}$$

Задача (1.3)–(1.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi \left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.3)–(1.4). Стало быть, рассматривать задачу (1.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$Y''_n(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0, \qquad y \in (0, s), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}y} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}y}, \qquad y \in (0, s), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.12}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.1).

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $u(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$, т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}y} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}y}\right). \tag{1.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только краевые условия по y:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, s) = f(x), \qquad x \in (0,\ l).$$

Для функции $u(x, y)$ искомого вида они означают:

$$0 = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\, X_n(x), \tag{1.14}$$

$$f(x) = u(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}s} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}s}\right) X_n(x), \tag{1.15}$$

Пусть функция $f(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \tag{1.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты f_n. Для этого домножим (1.16) на $X_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2} + m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, l]$:

$$(f, X_m) = f_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{f_m}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{f_m}{2}\int_0^l dx = \frac{lf_m}{2},$$

откуда

$$f_n = \frac{2}{l}(f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.17}$$

Итак, для коэффициентов A_n и B_n из представления (1.13) решения $u(x,t)$, в силу (1.14) имеем:

$$A_n + B_n = 0.$$

А из (1.15)–(1.17) с учётом $B_n = -A_n$ получаем:

$$A_n\left(e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}s} - e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}s}\right) = 2A_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right) = f_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx.$$

И, наконец,

$$A_n = -B_n = \frac{f_n}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right)} = \frac{1}{l\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right)}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.13) найденные коэффициенты A_n и B_n из (1). Получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right)}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \tag{1.18}$$

где f_n определены равенством (1.17).

<u>№ 717 e).</u> **Случай неоднородных краевых условий по x.**

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\quad y \in (0,\ s), \\ u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = Ty, & y \in (0,\ s), \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,s) = \frac{sTx}{l}, & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{2.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Сведение краевых условий при $x = 0$, $x = l$ к однородным.
Аналогично задачам с неоднородными краевыми условиями для параболических и гиперболических уравнений, можно легко найти функцию

$$w(x,y) = (a_1x + b_1)\mu(y) + (a_2x + b_2)\nu(y)$$

, такую, чтобы

$$w(0,y) = \mu(y), \quad w(l,y) = \nu(y).$$

В нашем случае $\mu(y) = 0$, $\nu(y) = Ty$, и функция $w(x,y)$ имеет вид

$$w(x,y) = \frac{Txy}{l}. \tag{2.2}$$

Найденная функция $w(x,y)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\quad y \in (0,\ s), \\ w(0,y) = 0, \quad w(l,y) = Ty, & y \in (0,\ s), \\ w(x,0) = 0, \quad w(x,s) = \frac{Txs}{l}, & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{2.3}$$

Поэтому для функции

$$v(x,y) = u(x,y) - w(x,y)$$

мы получаем задачу:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\quad y \in (0,\ s), \\ v(0,y) = 0, \quad v(l,y) = 0, & y \in (0,\ s), \\ v(x,0) = 0, \quad v(x,s) = 0, & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{2.4}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение задачи (2.4)**.** В данном случае нет необходимости искать решение методом Фурье, поскольку задача (2.4) имеет, очевидно, решение

$$v(x,t) \equiv 0, \qquad x \in (0,\ l),\quad y \in (0,\ s).$$

Из теории краевых задач известно, что решение таких задач единственно (в случае если хотя бы одно краевое условие – не второго рода), поэтому ничего другого мы методом Фурье не найдём.

Поэтому нам осталось написать ответ:

$$u(x,y) = w(x,y) = \frac{Txy}{l}, \qquad x \in (0,\ l),\quad y \in (0,\ s).$$

№ 718 а).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0,\ +\infty),\quad y \in (0,\ l), \\ u(0,y) = f(y), \quad u(\infty,y) = 0, & y \in (0,\ l), \\ u(x,0) = u_y(x,l) = 0, & x \in (0,\ +\infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

В данном случае задача поставлена в полуполосе и, поскольку из двух переменных только y меняется на конечном отрезке, задачу Штурма – Лиувилля мы можем получить только для функции $Y(y)$.

<u>Шаг 1.</u> Будем искать решение уравнения $u_{xx} + u_{yy} = 0$ с краевыми условиями $u(x,0) = u_y(x,l) = 0$ в виде $\qquad U(x,y) = X(x)Y(y)$.

Сразу заметим, что краевые условия при $y = 0$, $y = l$ означают для функции $Y(y)$ следующее:

$$Y(0) = Y'(l) = 0. \tag{3.2}$$

Подставим $U(x,y)$ в уравнение, получим:

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

Предположив, что $X(x)Y(y) \neq 0$, поделим это равенство на $X(x)Y(y) \neq 0$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $Y(y)$ имеем задачу

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \tag{3.3}$$

$$Y(0) = Y'(l) = 0, \tag{3.4}$$

а для функции $X(x)$ – уравнение:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad x \in (0,\ \infty). \tag{3.5}$$

Задача (3.3)–(3.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Её решение мы уже находили в № 717 а).

Эта задача имеет бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Стало быть, рассматривать задачу (3.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$X''_n(x) - \lambda_n X_n(x) = 0, \qquad x \in (0,\ \infty), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}x} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}, \qquad y \in (0, s), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (3.1).

Будем искать решение задачи (3.1) в виде $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)\left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}x} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}\right). \tag{3.8}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только краевые условия по x:

$$u(0,y) = f(y), \quad u(\infty,y) = 0, \qquad y \in (0,\ l).$$

Для функции $u(x,y)$ искомого вида первое условие означает:

$$f(y) = u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(0)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\, Y_n(y), \tag{3.9}$$

А второе условие $u(\infty,y) = 0$ может выполняться только при

$$A_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, наше решение должно иметь вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right) e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}. \tag{3.10}$$

Пусть функция $f(y)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(y), \tag{3.11}$$

Как мы выяснили, решая № 717 а), коэффициенты f_n имеют вид:

$$f_n = \frac{2}{l}(f, Y_n) = \frac{2}{l}\int_0^l f(y)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)dx. \tag{3.12}$$

Итак, для коэффициентов B_n из (3.9)–(3.12) получаем:

$$B_n = f_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(y)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)dx. \tag{3.13}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.10) найденные коэффициенты B_n из (3.13). Получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right) e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}, \tag{3.14}$$

где f_n определены равенством (3.12).

№ 717 б).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\quad y\in(0,\ s),\\ u_x(0,y)=u_x(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=A,\quad u(x,s)=Bx, & x\in(0,\ l). \end{cases}$$

№ 717 в).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\quad y\in(0,\ s),\\ u_x(0,y)=u(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=0,\quad u(x,s)=Bx, & x\in(0,\ l). \end{cases}$$

№ 717 г).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\quad y\in(0,\ s),\\ u(0,y)=U,\quad u_x(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u_y(x,0)=T\sin\frac{\pi x}{2l},\quad u(x,s)=0, & x\in(0,\ l). \end{cases}$$

№ 717 д).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\quad y\in(0,\ s),\\ u(0,y)=0,\quad u_x(l,y)=q, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=0,\quad u(x,s)=U, & x\in(0,\ l). \end{cases}$$

№ 718 б).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\quad y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=f(y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u_y(x,0)=u_y(x,l)+hu(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty),\quad h>0. \end{cases}$$

№ 718 в).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\quad y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=y(l-y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u(x,0)=u(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$$