ПАМЯТКА — 2011
к экзамену по курсу
«Уравнения математической физики»

Линейное уравнение 2-го порядка в $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1,\ldots,x_n).$$

Формулы векторного анализа:

$$\int_{\partial\Omega} (A(y),\nu_y)\;ds_y = \int_{\Omega} \operatorname{div} A(x)\;dx, \qquad \text{(GO)}$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_y}\;ds_y = \int_{\Omega} \Delta u(x)\;dx, \qquad \text{(Гаусс)}$$

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu_y}\;ds_y = \int_{\Omega} v\Delta u\;dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\;dx, \qquad \text{(Грин 1)}$$

$$\int_{\partial\Omega} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial \nu_y} - v\,\frac{\partial u}{\partial \nu_y}\right)\;ds_y = \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\;dx. \qquad \text{(Грин 2)}$$

Общая смешанная задача для ур-я теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, \quad u = u(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\ \left(\alpha u + \beta\,\dfrac{\partial u}{\partial \nu_y}\right)\Big|_{\partial\Omega} = \mu\,\Big|_{\partial\Omega}, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Простейшая одномерная задача теплопроводности с классическими краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_t = a^2\,u_{xx}, \qquad 0<x<l, \quad t>0, \\ \Gamma_0(u) = 0, \quad \Gamma_1(u) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

При доказательстве теоремы единственности:

$$v(x,t) = u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t), \qquad F(t) = \frac{1}{2a^2}\int_0^l v^2(x,t)\;dx.$$

Принцип экстремума для уравнения теплопроводности в прямоугольнике — вспомогательная функция:

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{A-M}{2l^2}(x-x_0)^2, \quad A>M, \quad l\equiv l_2 - l_1.$$

Интеграл типа Эйлера–Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\;dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\;e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Формула Пуассона в одномерной теплопроводности:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\;e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\;ds.$$

При ее выводе: $\displaystyle U(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,e^{-i\xi x}\;dx.$

При доказательстве принципа экстремума для полосы:

$$v(x,t) = \left(\frac{x^2}{l^2} + \frac{2a^2 t}{l^2}\right)(D-d) + M - u(x,t),$$

$$D = \sup_{\mathbb{R}\times[0,T]} u(x,t), \qquad d = \inf_{\mathbb{R}\times[0,T]} u(x,t),$$

$$M = \sup_{\mathbb{R}} u(x,0).$$

В принципе экстремума для гармонических функций:

$$v(x) = u(x) + \frac{D-M}{8R^2}\,|x-a|^2.$$

Фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\,\ln|x|, & n=2, \\ -\dfrac{1}{\omega_n\,(n-2)\,|x|^{n-2}}, & n\geqslant 3, \end{cases}$$

где $\displaystyle \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \frac{n\,\pi^{n/2}}{(n/2)!}$.

Фундаментальная формула Грина:

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)\;dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y}\;u(y) - E(x-y)\;\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\right) ds_y$$

(при выводе использовать 2-ю формулу Грина).

Теорема о среднем для гармонических функций:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{|y-x|=R} u(y)\;ds_y.$$

Решение задачи Дирихле для ур-я Пуассона:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)\;dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\;ds_y.$$

Формула Пуассона для шара:

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)\;ds_y}{|y-x|^n},$$

при ее выводе $\displaystyle G(x,y) = E(x-y) - E\left(\frac{|x|}{R}\;y - \frac{R}{|x|}\;x\right)$,

рассматривается $\displaystyle \frac{\partial G}{\partial y_k}$, затем $\displaystyle \frac{\partial G}{\partial \nu_y}\Big|_{|y|=R}$.

Неравенство Харнака:

$$\frac{R^{n-2}\,(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}\;u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R^{n-2}\,(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}\;u(0)$$

(доказательство через нер-во $\triangle$-ка и ф-лу Пуассона).

Оператор Лапласа

а) сферически-симметричный случай в $\mathbb{R}^n$

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\,\frac{du(r)}{dr}\right);$$

б) в полярных координатах на плоскости

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

в) в цилиндрических координатах в пространстве

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

г) в сферических координатах в пространстве

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Цилиндрические функции

Уравнение Бесселя индекса $\nu \in \mathbb{R}$:

$$x^2\,w''(x) + x\,w'(x) + (x^2-\nu^2)w(x) = 0.$$

Решение:

$$w(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x).$$

При $\nu \geqslant 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0+}|J_\nu(x)| < \infty, \qquad \lim_{x\to 0+}|N_\nu(x)| = \infty.$$

Запись функции Бесселя:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Запись функции Неймана:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \qquad \nu \notin \mathbb{Z},$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}(J_\nu(x)) - (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}(J_{-\nu}(x))\right)\Bigg|_{\nu=n}.$$

Рекуррентные соотношения:

а) $\displaystyle \frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$

б) $\displaystyle \frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$

в) $\displaystyle J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}\,J_\nu(x),$

г) $\displaystyle J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\,J_\nu(x),$

д) $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$

е) $\displaystyle J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\,J_\nu(x).$

Свойство ортогональности и нормы:

$$\int_0^R rJ_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right)J_n\left(\frac{\gamma_j}{R}\,r\right)dr = 0, \qquad \gamma_k \neq \gamma_j,$$

$$\left\|J_n\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right)\right\|^2 \equiv \int_0^R rJ_n^2\left(\frac{\gamma_k}{R}\,r\right)\,dr = \frac{R^2}{2}(J_{n+1}(\gamma_k))^2.$$

Здесь γ_k, γ_j – положительные корни функции $J_n(x)$.

Полиномы Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right], \qquad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$$

Явная запись нескольких первых полиномов:

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}\,(3t^2-1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}\,(5t^3-3t), \qquad P_4(t) = \frac{1}{8}\,(35t^4-30t^2+3).$$

Обратные выражения:

$$1 = P_0(t), \qquad t = P_1(t), \qquad t^2 = \frac{1}{3}(P_0(t)+2P_2(t)),$$

$$t^3 = \frac{1}{5}(3P_1(t)+2P_3(t)), \quad t^4 = \frac{1}{35}(7P_0(t)+20P_2(t)+8P_4(t)).$$

Спектральная задача для уравнения Лежандра:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left((1-t^2)\dfrac{dw(t)}{dt}\right) + \lambda w(t) = 0, & |t| < 1, \\ |w(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

Спектр: $\lambda_n = n(n+1)$, $w_n(t) = P_n(t)$, $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$

Свойство ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_k(t)\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = k. \end{cases}$$

Рекуррентные соотношения:

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)\,t\,P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)\right)$$

для $n = 1,\,2,\,3,\,\ldots\,.$

Запись решений

1) Формула

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$$

выражает общее решение одномерного уравнения колебаний $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

2) Формула

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi)\left(\frac{r}{R}\right)^k$$

дает общий вид гармонической функции в круге $r < R$ в полярных координатах на плоскости.

3) Формула

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^k$$

дает общий вид гармонической функции в шаре $r < R$ в случае зависимости от радиуса r и сферического угла θ.